

54683

1178

**ACTA ACADEMIAE PAEDAGOGICAE SZEGEDIENSIS  
SERIES PHYSICA CHEMICA MATHEMATICA**

1987 FEB 03



**A**

**JUHÁSZ GYULA  
TANÁRKÉPZŐ FŐISKOLA  
TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI**

**SZEGED, 1985**

THE UNIVERSITY OF CHICAGO  
DIVISION OF THE PHYSICAL SCIENCES  
DEPARTMENT OF CHEMISTRY

RESEARCH REPORT  
NO. 1000  
JANUARY 1960  
BY  
J. H. DUNN  
AND  
R. M. WATSON

# **TANULMÁNYOK A FIZIKA, KÉMIA, MATEMATIKA TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL**

**SZENDREI JÁNOS és BÉKÉSI IMRE**

**közreműködésével**

**szerkesztette:**

**SIPOSNÉ KEDVES ÉVA**

**ISSN 0236-7742**

**Acta Acad. Paed. Szeged.**

**Ser. Phys. — Chem. — Math.**

**1985**



# ADALÉKOK A TÖBBKOMPONENSŰ RENDSZEREK KÉNYSZERÍTETT RAMAN-SZÓRÁSÁNAK ELMÉLETÉHEZ

PINTÉR FERENC—SERES FERENC—VIZE LÁSZLÓ—  
GÁTI LÁSZLÓ

Jelen dolgozatban célul tűztük ki, hogy N. Bloembergen és Y. R. Shen [1] kényszerített Raman-szórásra vonatkozó eredményeit, amelyek egykomponensű rendszerekre vonatkoznak, általánosítsuk kétkomponensű folyadék elegyekre.

Az általunk vizsgált probléma a következő. A kényszerített Raman-szórást vizsgálva benzol és ciklohexán keverékében megfigyelhetjük, hogy változtatva a komponensek koncentráció viszonyát, 80%-os ciklohexán és 20%-os benzol „kritikus” koncentráció viszonyánál a spektrumvonalak száma ugrásszerűen megnő [2]. Az ettől eltérő koncentráció viszonyoknál csak az egyes molekulákra jellemző alap-harmonikusok, illetve felharmonikusaik jelennek meg. A vonalakat azonosítva adódott, hogy nem mindegyik megengedett kombinációs vonal jelent meg, tehát nem mindegyik  $\bar{\nu} = \bar{\nu}_L + m_1\bar{\nu}_1 + m_2\bar{\nu}_2 + m_3\bar{\nu}_3 + m_4\bar{\nu}_4$  hullámszámú vonal jelentkezett a spektrumban, itt  $\bar{\nu}_L$  a lézer,  $\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \bar{\nu}_3, \bar{\nu}_4$  a molekulákra jellemző vibrációs vonalak hullámszáma és  $m_1, m_2, m_3, m_4 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Elgondolásunk szerint ennek oka az egyes vonalakra vonatkozó erősítési, illetve veszteségi tényezők különbözőségében rejlik.

A kérdés tárgyalása során az elméletben számos egyszerűsítő feltevést teszünk. Ilyen például az egymódusú lézersugárzás, a lézersugárzás homogenitása a keresztmetszetben, a lézersugárzás síkhullám jellege és a lézer teljesítmény időbeli állandóságának feltételezése. Ezeken kívül nincsenek figyelembe véve a tranziens effektusok, az önfókuszálás, az egyéb nem lineáris jelenségek és végül a molekulák rotációs mozgásából származó különböző effektusok.

A kétkomponensű folyadék elegyek tárgyalására a klasszikus csatolt hullám-egyenleteket használjuk fel, amelyeket a nemlineáris optikába J. A. Armstrong és társai vezettek be [3]. [1] alapján, ha feltételezzük, hogy a közegben csak a  $Q_v$  vibrációs hullám, az  $\bar{E}_L$  lézerhullám és a komponenseknek csak az elsőrendű  $\bar{E}_S$ , Stokes és  $\bar{E}_{AS}$ , anti-Stokes hulláma van jelen, a csatolt hullámegyenlet-rendszer:

$$\ddot{Q}_v + \beta_j \nabla^2 \bar{Q}_v + \omega_{vj}^2 \bar{Q}_v + 2\Gamma_j \dot{\bar{Q}}_v = N_j \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial Q_v} \right)_{oj} \bar{E}^2, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \bar{E}_L - \frac{n_L^2}{c^2} \ddot{\bar{E}}_L = \frac{4\pi}{c^2} \ddot{\bar{P}}_L^{NL}, \quad (2)$$

$$\nabla^2 \bar{E}_S - \frac{n_s^2}{c^2} \ddot{\bar{E}}_S = \frac{4\pi}{c^2} \ddot{\bar{P}}_S^{NL}, \quad (3)$$

$$\nabla^2 \vec{E}_{ASj} - \frac{n_{AS}^2}{c^2} \ddot{\vec{E}}_{ASj} = \frac{4\pi}{c^2} \ddot{\vec{P}}_{ASj}^{NL}, \quad (4)$$

ahol

$$\vec{E} = \frac{1}{2} (\vec{E}_L + \vec{E}_{S1} + \vec{E}_{AS1} + \vec{E}_{S2} + \vec{E}_{AS2} + \dots + \text{komplex konjugált}) \quad (5)$$

és

$$\vec{P}_{lj}^{NL} = \sum_{i=1}^2 N_i \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial Q_{vj}} \right)_{oi} [(\vec{Q}_{vi}^* + \vec{Q}_{vi})]_{lj}, \quad (6)$$

a nemlineáris indukált polarizáció;  $l=S, AS$  és  $j=1, 2$ . Az (1) egyenletben szereplő  $\Gamma_j$  a csillapítási tényező, amely csak a  $\vec{k}_{vj}$  hullámvektor függvénye,  $c$  — a vákumbeli fénysebesség,  $n_L, n_S, n_{AS}$  a komplex törésmutató a lézer és a  $j$ -edik típusú molekula Stokes és anti-Stokes frekvenciájánál. Az (1)-ben szereplő  $\left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial Q_{vj}} \right)_{oj}$  a polarizálhatósági tenzornak a  $Q_{vj}$  szerinti differenciálhányadosát jelenti az egyensúlyi helyzetre vonatkozóan. Felhasználva az energia- és impulzusmegmaradás tételét, valamint az előzőekben tett egyszerűsítéseket a (3) és (4) egyenletekben szereplő nemlineáris polarizáció értékére kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \vec{P}_{Sj}^{NL} = & [\chi_{ASjSj} + \chi_{NR}] |\vec{E}_L|^2 \vec{E}_{ASj}^* + [\chi_{Sj} + \chi_{NR}] |\vec{E}_L|^2 \vec{E}_{Sj} + \\ & + [\chi_{SjSj} + \chi_{NR}] |\vec{E}_L|^2 \vec{E}_{Sj}^* + [\chi_{ASjSj} + \chi_{NR}] |\vec{E}_L|^2 \vec{E}_{ASj}^*, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \vec{P}_{ASj}^{NL} = & [\chi_{SjASj} + \chi_{NR}] |\vec{E}_L|^2 \vec{E}_{Sj}^* + [\chi_{ASj} + \chi_{NR}] |\vec{E}_L|^2 \vec{E}_{ASj} + \\ & + [\chi_{SjASj} + \chi_{NR}] |\vec{E}_L|^2 \vec{E}_{Sj} + [\chi_{ASjASj} + \chi_{NR}] |\vec{E}_L|^2 \vec{E}_{ASj}^*, \end{aligned} \quad (8)$$

ahol, ha  $j=1, 2$ , akkor  $i=2, 1$ , valamint  $\chi_{NR}$  az ún. Raman szuszceptibilitás nem rezonáns része, amely reális mennyiség és a frekvenciától csak kismértékben függ [3].

$$\chi_{lj} = - \frac{N_j^2 \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial Q_{vj}} \right)_{oj} \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial Q_{vj}} \right)_{oj}}{\omega_{vj}^2 - (\omega_{0j}^2 - \beta_j k_{vj}^2) - 2i\Gamma_j \omega_{vj}} \equiv \frac{N_j^2 \left| \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial Q_{vj}} \right)_{oj} \right|^2}{D_j^*} \quad (9)$$

a nemlineáris szuszceptibilitás, illetve  $\chi_{lki} = (\chi_{lj}^* \chi_{li})^{1/2}$ , ahol  $j=1, 2$  és  $k, l=S, AS$ .

A  $\chi_{lj}$  nemlineáris szuszceptibilitás reális része a törésmutatóval, a képzetes része az erősítési tényezővel van kapcsolatban. További feladatunk az erősítési tényező meghatározása különböző esetekben.

#### a) A Stokes és a vibrációs hullámok közötti csatolás figyelembe vétele

Feltesszük, hogy az anti-Stokes hullám hiányzik a Raman-aktív anyagban levő sugárzási térből és a lézer teljesítménye állandó. Ily módon a (3) és (8) egyenletekből az alábbi karakterisztikus egyenletek adódnak az energia- és impulzusmegmaradás tételének felhasználásával:

$$\left[ k_{S1}^2 - \frac{n_{S1}^2}{c^2} \omega_{S1} \right] \vec{E}_{S1} = \frac{4\pi}{c^2} \{ [\chi_{S1} + \chi_{NR}] \omega_{S1}^2 |\vec{E}_L|^2 \vec{E}_{S1} + [\chi_{S1S1} + \chi_{NR}] (2\omega_L - \omega_{S1}) |\vec{E}_L|^2 \vec{E}_{S1}^* \}, \quad (10)$$

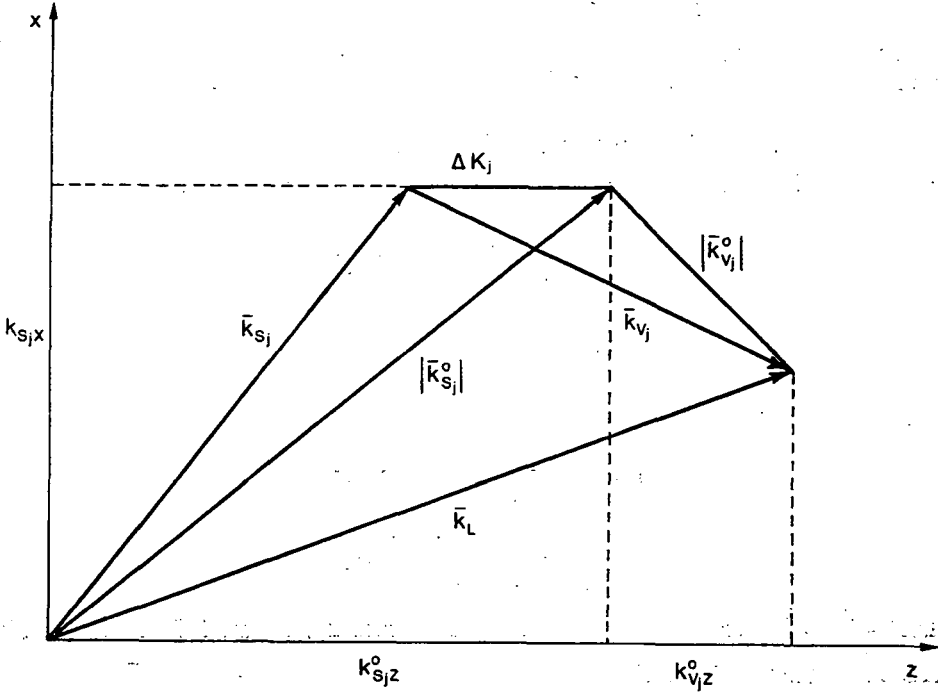
$$\left[ k_{S_2}^2 - \frac{n_{S_2}^2}{c^2} \omega_{S_2}^2 \right] \vec{E}_{S_2} = \frac{4\pi}{c^2} \{ [\chi_{S_1 S_2} + \chi_{NR}] (2\omega_L - \omega_{S_1}) \vec{E}_L \vec{E}_{S_1}^* + [\chi_{S_2} + \chi_{NR}] \omega_{S_2}^2 |\vec{E}_L|^2 \vec{E}_{S_2} \}.$$

Vezessük be a

$$k_{S_j}^{0*} = \frac{n_{S_j}^{\prime 2} \omega_{S_j}^2}{c^2}; \quad a_{S_j} = \frac{n_{S_j}^{\prime \prime 2} \omega_{S_j}^2}{2c^2 k_{S_j}^2}; \quad n = n' + in''; \quad (11)$$

$$k_{S_j z}^0 = [k_{S_j}^{0*} - (k_{S_j x}^2 + k_{S_j y}^2)]^{1/2}; \quad k_{v_j z}^0 = [k_{v_j}^{0*} - (k_{v_j x}^2 + k_{v_j y}^2)]^{1/2}; \quad \Delta K_j = k_{S_j z} - k_{S_j z}^0$$

jelöléseket, ahol a  $(k_{S_j x}^2 + k_{S_j y}^2)^{1/2}$  tangenciális komponens és az  $\omega_{S_j}$  frekvencia adottak. Az 1. ábrában a (11) alatti jelöléseket mutatjuk be vektorábrán.



1. ábra

Feltételezve, hogy  $\chi_{NR}$  szerepe elhanyagolható [1, 3], a (10) alatti egyenletek az alábbi alakúak lesznek

$$\left[ \Delta K_1^2 + 2k_{S_1 z}^0 (\Delta K_1 - ia_{S_1}) - \frac{4\pi}{c^2} \omega_{S_1}^2 |E_L|^2 \chi_{S_1} \right] \vec{E}_{S_1} - \left[ \frac{4\pi}{c^2} \omega_{S_1}^2 |E_L|^2 \chi_{S_2, S_1} \right] \vec{E}_{S_2}^* = 0, \quad (12)$$

$$- \left[ \frac{4\pi}{c^2} \omega_{S_2}^2 \chi_{S_1, S_2}^* |E_L|^2 \right] \vec{E}_{S_1}^* + \left[ \Delta K_2^2 + 2k_{S_2 z}^0 (\Delta K_2^* + ia_{S_2}) - \frac{4\pi}{c^2} \omega_{S_2}^2 |E_L|^2 \chi_{S_2}^* \right] \vec{E}_{S_2} = 0,$$

ahol

$\omega'_{S_1} = \omega_{S_1} + \omega_{v_1} + \omega_{v_2}$  és  $\omega'_{S_2} = \omega_{S_2} + \omega_{v_1} + \omega_{v_2}$ ,  
mivel a további komponensektől eltekintettünk.

A (12) egyenletrendszernek akkor, és csak akkor van nem triviális megoldása, ha az együtthatókból alkotott determinánsa zérus, azaz

$$\begin{aligned} & \left[ \Delta K_1^2 + 2k_{S_1,z}^0 (\Delta K_1 - ia_{S_1}) - \frac{4\pi}{c^2} \omega_{S_1}^2 |E_L|^2 \chi_{S_1} \right] \times \\ & \times \left[ \Delta K_2^{*2} + 2k_{S_2,z}^0 (\Delta K_2^* + ia_{S_2}) - \frac{4\pi}{c^2} \omega_{S_2}^2 |E_L|^2 \chi_{S_2}^* \right] - \\ & - \frac{16\pi^2}{c^4} \omega_{S_1}' \omega_{S_2}' |E_L|^4 \chi_{S_1 S_1} \chi_{S_2 S_2}^* = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

A továbbiakban azt az esetet vizsgáljuk, amikor  $|\Delta K_j| \ll k_{S_j,z}$ . Fizikailag ez azt jelenti, hogy a csatolás a fénytér és a vibrációs hullámok között gyenge.

b) *A Stokes hullámokra vonatkozó erősítési tényező*

Kölcsönhatás nélküli esetben (13)-ból [1] alapján  $\Delta K_1^{(0)}$  és  $\Delta K_2^{(2)}$ -ra adódik, hogy

$$\begin{aligned} \Delta K_1^{(0)} &= ia_{S_1} + \frac{4\pi}{c^2} \omega_{S_1}^2 |E_L|^2 \chi_{S_1} / 2k_{S_1,z}^0, \\ \Delta K_2^{(0)} &= -ia_{S_2} + \frac{4\pi}{c^2} \omega_{S_2}^2 |E_L|^2 \chi_{S_2}^* / 2k_{S_2,z}^0. \end{aligned} \quad (14)$$

(14) és (9) alapján az erősítési tényezők:

$$\begin{aligned} g_{S_1}^{(0)} &= \frac{4\pi \omega_{v_1}^2 \Gamma_1 c^2 |E_L|^2}{h \omega_{S_1}^2 k_{S_1,z}^0 |D_1|^2} N_1 \frac{d\sigma_1}{d\Omega}, \\ g_{S_2}^{(0)} &= \frac{4\pi \omega_{v_2}^2 \Gamma_2 c^2 |E_L|^2}{h \omega_{S_2}^2 k_{S_2,z}^0 |D_2|^2} N_2 \frac{d\sigma_2}{d\Omega}, \end{aligned} \quad (15)$$

ahol  $\frac{d\sigma_1}{d\Omega}$ ,  $\frac{d\sigma_2}{d\Omega}$  az első és második komponens molekulánkénti differenciális szórási hatáskeresztmetszetét jelölik.

A (13), (14), (15) összefüggések alapján a rendszer teljes erősítési tényezőjére kölcsönhatás esetében adódik, hogy

$$g_S = \pm \frac{\pi \omega_{S_1}' \omega_{S_2}' c^2 |E_L|^2}{h \omega_{S_1}^2 \omega_{S_2}^2 \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2}} \frac{\sqrt{N_1 N_2}}{\sqrt{k_{S_1,z}^0 k_{S_2,z}^0}} \sqrt{\frac{d\sigma_1}{d\Omega} \cdot \frac{d\sigma_2}{d\Omega}}. \quad (16)$$

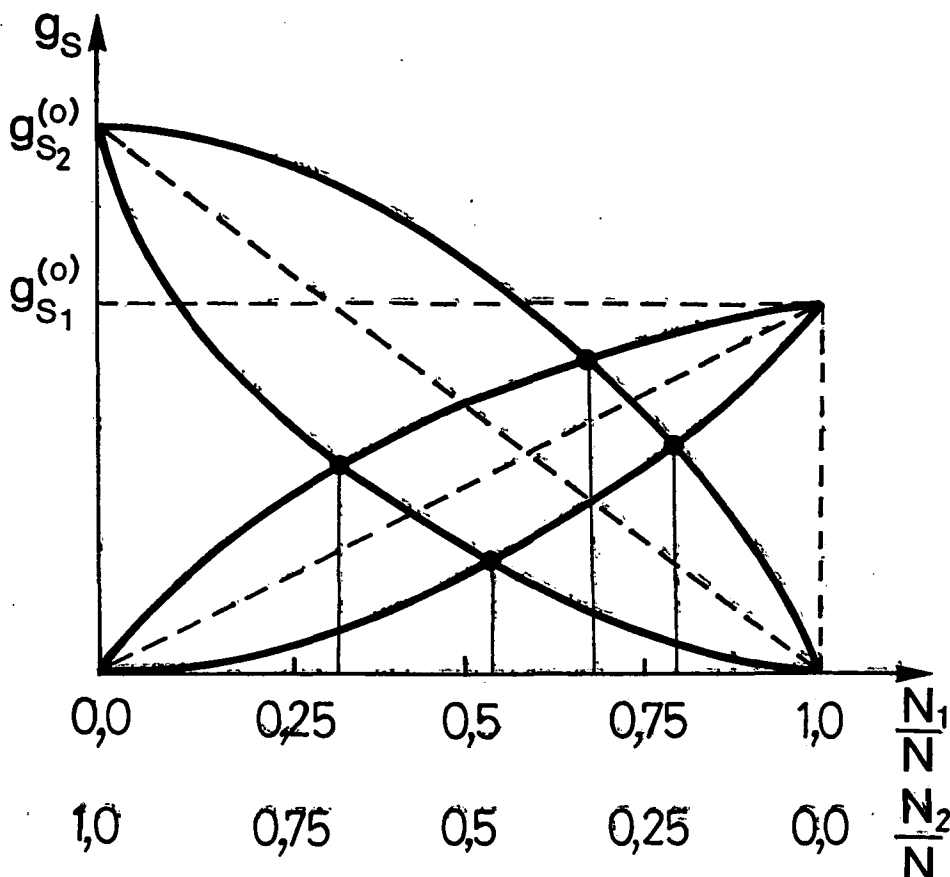
A kölcsönhatás miatt az erősítési tényező komponensenként

$$\begin{aligned} g_{S_1}^{\pm} &= \frac{\pi c^2 |E_L|^2}{h \omega_{S_1}^2 k_{S_1,z}^0 \Gamma_1} N_1 \frac{d\sigma_1}{d\Omega} \left[ 1 \pm \frac{\omega_{S_1}' \omega_{S_2}'}{\omega_{S_2}^2} \left( \frac{k_{S_1,z}^0 \Gamma_1}{k_{S_2,z}^0 \Gamma_2} \frac{d\sigma_2/d\Omega}{d\sigma_1/d\Omega} \frac{N_2}{N_1} \right)^{1/2} \right], \\ g_{S_2}^{\pm} &= \frac{\pi c^2 |E_L|^2}{h \omega_{S_2}^2 k_{S_2,z}^0 \Gamma_2} N_2 \frac{d\sigma_2}{d\Omega} \left[ 1 \pm \frac{\omega_{S_1}' \omega_{S_2}'}{\omega_{S_1}^2} \left( \frac{k_{S_2,z}^0 \Gamma_2}{k_{S_1,z}^0 \Gamma_1} \frac{d\sigma_1/d\Omega}{d\sigma_2/d\Omega} \frac{N_1}{N_2} \right)^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (17)$$



ami azt mutatja, hogy a kölcsönhatásnak nem elhanyagolható szerepe van az erősítési tényezők egymásra gyakorolt hatását tekintve.

Az erősítési görbék hozzávetőleges menetét a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Az erősítési tényezők koncentrációtól való függése következtében, amint ez a 2. ábrán látható, létezik olyan koncentráció viszony, hogy az elsőrendű Stokes-vonalak erősítési tényezői egyenlőek. Ha feltesszük, hogy a két komponensre a veszteségek ugyanazok, akkor az elsőrendű Stokes-vonalak intenzitása is egyenlő lesz. Kölcsönhatás nélküli esetben (17)-ből kapjuk, hogy  $g_{s_1}^0 = g_{s_2}^0$ , amiből a koncentráció viszonyra

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_{s_1}^2 \Gamma_1 k_{s_1 z}^0}{\omega_{s_2}^2 \Gamma_2 k_{s_2 z}^0} \frac{d\sigma_2/d\Omega}{d\sigma_1/d\Omega} \quad (18)$$

adódik.

A (18) egyenletből, ha ismerjük a molekulákra vonatkozó megfelelő paramétereket és az egyik molekula differenciális szórési hatáskeresztmetszetét, a koncentráció viszony mérésével a másik komponens differenciális szórési hatáskeresztmetszetét ki

tudjuk számítani. Így egy igen egyszerű és gyors módját kapjuk a differenciális szórási hatáskeresztmetszet meghatározásának, az eddig ismert módszerekhez képest [4].

A (13) egyenletekből ugyancsak a (18) egyenletekre jutunk, ha az erősítés tényezőkben fellépő korrekciók azonos előjelűek. Ha nem, akkor a koncentráció viszonyra adódik, hogy

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_{S_2}^2 k_{S_1z}^0 \omega_{v_1} \Gamma_1 (d\sigma_2/d\Omega)^2}{\omega_{S_1}^2 k_{S_2z}^0 \omega_{v_2} \Gamma_2 (d\sigma_1/d\Omega)^2} \pm 2 \frac{\omega'_{S_1} \omega'_{S_2}}{\omega_{S_1}^2} \left( \frac{k_{S_1z}^0 \omega_{v_1} \Gamma_1 (d\sigma_2/d\Omega)^2}{k_{S_2z}^0 \omega_{v_2} \Gamma_2 (d\sigma_1/d\Omega)^2} \frac{N_1}{N_2} \right)^{1/2}. \quad (19)$$

c) Stokes és anti-Stokes hullámok közötti csatolás figyelembevétele

Az előző feltevésekből hagyjuk el az anti-Stokes hullámok nem létezéséről szólót. Ekkor az impulzus megmaradását a

$$2\vec{k}_L = \vec{k}_{S_j} + \vec{k}_{AS_j} = \vec{k}_{S_j} + \vec{k}_{AS_i} + (\vec{k}_{v_j} - \vec{k}_{v_i}),$$

az energia megmaradását a

$$2\omega_L = \omega_{S_j} + \omega_{AS_j} = \omega_{S_j} + \omega_{AS_i} + (\omega_{v_j} - \omega_{v_i})$$

egyenletek fejezik ki, ahol  $i, j=1, 2$  és feltesszük, hogy az anti-Stokes hullám kialakulása kétlépcsős folyamat eredménye [5]. Tegyük fel még, hogy

$$\vec{E}_{AS_j} = \vec{\mathcal{E}}_{AS_j} \exp [i(\vec{k}_{AS_j} \vec{r} - \omega_{AS_j} t)],$$

ahol  $\vec{k}_{AS_j}$  az anti-Stokes hullámvektor komplex, az  $\omega_{AS_j}$  anti-Stokes frekvencia pedig valós mennyiség. A fentiek és az előzőekben tett feltevések miatt a (3) és (4) egyenletekből a következő szekuláris egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \left[ k_{S_1}^2 - \frac{n_{S_1}^2}{c^2} \omega_{S_1}^2 \right] \vec{E}_{S_1} &= \frac{4\pi}{c^2} \{ [\chi_{S_1} \omega_{S_1}^3 |E_L|^2] \vec{E}_{S_1} + [\chi_{AS_1 S_1} (2\omega_L - \omega_{AS_1})^2 \vec{E}_L^2] \vec{E}_{AS_1}^* + \\ &+ [\chi_{S_2 S_1} (2\omega_L - \omega_{S_2})^2 \vec{E}_L^2] \vec{E}_{S_2}^* + [\chi_{AS_2 S_1} (2\omega_L - \omega_{AS_2})^2 \vec{E}_L^2] \vec{E}_{AS_2}^* \}, \\ \left[ k_{AS_1}^2 - \frac{n_{AS_1}^2}{c^2} \omega_{AS_1}^2 \right] \vec{E}_{AS_1} &= \frac{4\pi}{c^2} \{ [\chi_{S_1 AS_1} (2\omega_L - \omega_{S_1})^2 \vec{E}_L^2] \vec{E}_{S_1}^* + [\chi_{AS_1} \omega_{AS_1}^2 |E_L|^2] \vec{E}_{AS_1} + \\ &+ [\chi_{S_2 AS_1} (2\omega_L - \omega_{S_2})^2 \vec{E}_L^2] \vec{E}_{S_2}^* + [\chi_{AS_2 AS_1} (2\omega_L - \omega_{AS_2})^2 \vec{E}_L^2] \vec{E}_{AS_2}^* \}, \\ \left[ k_{S_2}^2 - \frac{n_{S_2}^2}{c^2} \omega_{S_2}^2 \right] \vec{E}_{S_2} &= \frac{4\pi}{c^2} \{ [\chi_{S_1 S_2} (2\omega_L - \omega_{S_1})^2 \vec{E}_L^2] \vec{E}_{S_1}^* + [\chi_{AS_1 S_2} (2\omega_L - \omega_{AS_1})^2 \vec{E}_L^2] \vec{E}_{AS_1}^* + \\ &+ [\chi_{S_2} \omega_{S_2}^2 |E_L|^2] \vec{E}_{S_2} + [\chi_{AS_2 S_2} (2\omega_L - \omega_{AS_2})^2 \vec{E}_L^2] \vec{E}_{AS_2}^* \}, \\ \left[ k_{AS_2}^2 - \frac{n_{AS_2}^2}{c^2} \omega_{AS_2}^2 \right] \vec{E}_{AS_2} &= \frac{4\pi}{c^2} \{ [\chi_{S_1 AS_2} (2\omega_L - \omega_{S_1})^2 \vec{E}_L^2] \vec{E}_{S_1}^* + [\chi_{AS_1 AS_2} (2\omega_L - \omega_{AS_1})^2 \vec{E}_L^2] + \\ &+ [\chi_{S_2 AS_2} (2\omega_L - \omega_{S_2})^2 \vec{E}_L^2] \vec{E}_{S_2}^* + [\chi_{AS_2} \omega_{AS_2}^2 |E_L|^2] \vec{E}_{AS_2} \}. \end{aligned} \quad (20)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} k_{i,j}^{0a} &= \frac{n_{i,j}^2 \omega_{i,j}^2}{c^2}; \quad a_{i,j} = \frac{n_{i,j}^2 \omega_{i,j}^2}{2c^2 k_{i,j}^m}; \\ k_{S_j z}^m &= [k_{S_j}^{0a} - (k_{S_j z}^2 + k_{S_j y}^2)]^{1/2}; \end{aligned} \quad (21)$$



$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{4\pi}{c^2} (2\omega_L - \omega_{S_2})^2 \bar{E}_L^2 \chi_{S_2 S_1} \right] \bar{E}_{S_1}^* - \left[ \frac{4\pi}{c^2} (2\omega_L - \omega_{AS_2})^2 \bar{E}_L^2 \chi_{AS_2 S_1} \right] \bar{E}_{AS_2}^* = 0, \\
& - \left[ \frac{4\pi}{c^2} (2\omega_L - \omega_{S_1})^2 \bar{E}_L^2 \chi_{S_1 AS_1} \right] \bar{E}_{S_1}^* + \\
& + \left[ \Delta k_j - \Delta K_j \right]^2 + 2k_{AS_1 z}^m (\Delta k_{j1} - \Delta K_j - i a_{S_1}) - \frac{4\pi}{c^2} \omega_{AS_1}^2 |E_L|^2 \chi_{AS_1} \right] \bar{E}_{AS_1} - \\
& - \left[ \frac{4\pi}{c^2} (2\omega_L - \omega_{S_2})^2 \bar{E}_L^2 \chi_{S_2 AS_2} \right] \bar{E}_{S_2}^* - \left[ \frac{4\pi}{c^2} (2\omega_L - \omega_{AS_2})^2 \bar{E}_L^2 \chi_{AS_2 AS_1} \right] \bar{E}_{AS_2}^* = 0, \quad (22) \\
& - \left[ \frac{4\pi}{c^2} (2\omega_L - \omega_{S_1})^2 \bar{E}_L^2 \chi_{S_1 S_1} \right] \bar{E}_{S_1}^* - \left[ \frac{4\pi}{c^2} (2\omega_L - \omega_{AS_1})^2 \bar{E}_L^2 \chi_{AS_1 S_2} \right] \bar{E}_{AS_1}^* + \\
& + \left[ \Delta K_2^2 + 2k_{S_2 z}^m (\Delta K_2 - i a_{S_2}) - \left[ \frac{4\pi}{c^2} \omega_{S_2}^2 |E_L|^2 \chi_{S_2} \right] \bar{E}_{S_2} - \right. \\
& \left. - \left[ \frac{4\pi}{c^2} (2\omega_L - \omega_{AS_2})^2 \bar{E}_L^2 \chi_{AS_2 S_2} \right] \bar{E}_{AS_2}^* \right] \bar{E}_{AS_2}^* = 0, \\
& - \left[ \frac{4\pi}{c^2} (2\omega_L - \omega_{S_1})^2 \bar{E}_L^2 \chi_{S_1 AS_2} \right] \bar{E}_{S_1}^* - \left[ \frac{4\pi}{c^2} (2\omega_L - \omega_{AS_1})^2 \bar{E}_L^2 \chi_{AS_1 AS_2} \right] \bar{E}_{AS_1}^* - \\
& - \left[ \frac{4\pi}{c^2} (2\omega_L - \omega_{S_1})^2 \bar{E}_L^2 \chi_{S_2 AS_2} \right] \bar{E}_{S_2}^* + \\
& + \left[ (\Delta k_{iz} - \Delta K_i)^2 + 2k_{AS_2 z}^m (\Delta k_{iz} - \Delta K_i - i a_{AS_2}) - \frac{4\pi}{c^2} \omega_{AS_2}^2 |E_L|^2 \chi_{AS_2} \right] \bar{E}_{AS_2} = 0,
\end{aligned}$$

ahol  $i, j = 1, 2$  egymástól függetlenül. Mivel fennáll, hogy

$$(\Delta k_{j1} - \Delta K_j)^2 + 2k_{AS_1 z}^m (\Delta k_{j1} - \Delta K_j - i a_{AS_1}) = (\Delta k_1 - \Delta K_1)^2 + 2k_{AS_1 z}^m (\Delta k_1 - \Delta K_1 - i a_{AS_1})$$

és a másakra ugyanez, az  $i, j$  értékétől függetlenül, elég az utóbbi esettel foglalkozni.

A (22) egyenletrendszerben szereplő térerősségek együttthatóit jelöljük  $e_{i,j,k}$ -vel. Hogy az egyenletrendszernek létezzen nem triviális megoldása, az együttthatókból képzett  $8 \times 8$ -as determinánsnak zérusnak kell lennie, azaz

$$\begin{vmatrix}
e_{S_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{AS_1 S_1} & -e_{S_2 S_1} & -e_{AS_2 S_1} \\
0 & e_{AS_1} & 0 & 0 & -e_{S_1 AS_1} & 0 & -e_{S_2 AS_1} & -e_{AS_2 AS_1} \\
0 & 0 & e_{S_2} & 0 & -e_{S_1 S_2} & -e_{AS_1 S_2} & 0 & -e_{AS_2 S_2} \\
0 & 0 & 0 & e_{AS_2} & -e_{S_1 AS_2} & -e_{AS_1 AS_2} & -e_{S_2 AS_2} & 0 \\
0 & -e_{AS_1 S_1}^* & -e_{S_2 S_1}^* & -e_{AS_2 S_1}^* & e_{S_1}^* & 0 & 0 & 0 \\
-e_{S_1 AS_1}^* & 0 & -e_{S_2 AS_1}^* & -e_{AS_2 AS_1}^* & 0 & e_{AS_1}^* & 0 & 0 \\
-e_{S_1 S_2}^* & -e_{AS_1 S_2}^* & 0 & -e_{AS_2 S_2}^* & 0 & 0 & e_{S_2}^* & 0 \\
-e_{S_1 AS_2}^* & -e_{AS_1 AS_2}^* & -e_{AS_2 AS_2}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{AS_2}^*
\end{vmatrix} = 0.$$

Szemléletesebb formába átrendezve az alábbi determinánst kapjuk:

$$\begin{vmatrix}
 e_{S_1} & 0 & 0 & -e_{AS_1S_1} & 0 & 0 & -e_{S_1S_1} & -e_{AS_2S_1} \\
 0 & e_{AS_1} & -e_{S_1AS_1} & 0 & 0 & 0 & -e_{S_1AS_1} & -e_{AS_2AS_1} \\
 0 & -e_{AS_1S_1} & e_{S_1}^* & 0 & -e_{S_2S_1}^* & -e_{AS_2S_1}^* & 0 & 0 \\
 -e_{S_1AS_1}^* & 0 & 0 & e_{AS_1}^* & -e_{S_2AS_1}^* & -e_{AS_2AS_1}^* & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -e_{S_1S_2} & -e_{AS_1S_2} & e_{S_2} & 0 & 0 & -e_{AS_2S_2} \\
 0 & 0 & -e_{S_1AS_2} & -e_{AS_1AS_2} & 0 & e_{AS_2} & -e_{S_2AS_2} & 0 \\
 -e_{S_1S_2}^* & -e_{AS_1S_2}^* & 0 & 0 & 0 & -e_{AS_2S_2}^* & e_{S_2}^* & 0 \\
 -e_{S_1AS_2}^* & -e_{AS_1AS_2}^* & 0 & 0 & -e_{S_2AS_2}^* & 0 & 0 & e_{AS_2}^*
 \end{vmatrix} = 0. \quad (23)$$

A (23) determinánssal az alábbi rendszereket tudjuk tárgyalni:

1.  $\xrightarrow{\omega_L} \boxed{A+B} \xrightarrow{\omega_L+n\omega_{v_1}+m\omega_{v_2}}$
2.  $\xrightarrow{\omega_L} \boxed{A} \xrightarrow{\omega_L+n\omega_{v_1}} \boxed{B} \xrightarrow{(\omega_L+n\omega_{v_1})+m\omega_{v_2}}$
- } 3/a  $\boxed{A+B} \xrightarrow{\omega_L+n\omega_{v_1}+m\omega_{v_2}}$
3.  $\xrightarrow{\omega_L} \boxed{B} \xrightarrow{\omega_L+m\omega_{v_2}} \boxed{A} \xrightarrow{(\omega_L+m\omega_{v_2})+n\omega_{v_1}}$
4.  $\xrightarrow{\omega_L} \boxed{A} \xrightarrow{\omega_L+n\omega_{v_1}}$
5.  $\xrightarrow{\omega_L} \boxed{B} \xrightarrow{\omega_L+m\omega_{v_2}}$

Az 1. esetben a (23) determinánst változtatás nélkül kell felhasználni, míg a többi esetben a kölcsönhatást leíró vegyes indexű tagok nullával egyenlőek, tehát a (23) determinánsból csak a bal felső és a jobb alsó  $4 \times 4$ -es determináns marad meg. Ekkor két független egyenletre esik szét a determináns. A (23) determinánst kifejtve, kölcsönhatás nélküli esetben kapjuk az alábbi egyenletet.

$$(e_{S_r} e_{AS_r}^* - e_{AS_rS_r} e_{S_rAS_r}^*)(e_{S_r}^* e_{AS_r} - e_{AS_rS_r}^* e_{S_rAS_r}) = 0, \quad (24)$$

ahol  $r=1, 2$ .

A 2. és 3. esetben  $r=1, 2$  és az  $\vec{E}_L$  gerjesztő lézersugárzás térerőssége helyett a megfelelő  $\vec{E}_{S_r}$ ,  $\vec{E}_{AS_r}$  térerősségekkel kell számolni. A 4. esetben  $r=1$  és az 5. esetben  $r=2$ . A 4., illetve 5. esetet, amely az egykomponensű rendszert írja le, Y. R. Shen és N. Bloembergen részletesen tárgyalja [1]. A 2., 3. és 3/a esetben az  $\omega_L$  körfrekvencián kívül az  $\omega_{S_j}$ ,  $\omega_{AS_j}$  körfrekvenciájú hullámok is szóródnak a másik Raman aktív anyagban. (A 3/a elrendezés lehetővé teszi például az  $A$  anyag Raman vonalai intenzitásának a tanulmányozását a koncentráció függvényében, ha a  $B$  oldószer és az  $A$  oldott anyag molekulái között nincs kölcsönhatás.)

Hasonlóan az előző fejezethez, azt az esetet vizsgáljuk, amikor  $|\Delta K_j| \ll k_{S_jz}$ .

Ekkor

$$\Delta K_j^{(0)\pm} = \frac{1}{2} \left\{ i(a_{S_j} + a_{AS_j}) + \Delta k_j + \frac{2\pi\omega_{S_j}^2 |E_L|^2 \chi_{S_j}}{c^2 k_{S_jz}^m} - \frac{2\pi\omega_{AS_j}^2 |E_L|^2 \chi_{AS_j}^*}{c^2 k_{AS_jz}^m} \right\} \pm$$

$$\pm \left( \left[ \frac{2\pi\omega_{S_j}^2 |E_L|^2 \chi_{S_j}}{c^2 k_{S_j,z}^m} - \frac{2\pi\omega_{AS_j}^2 |E_L|^2 \chi_{AS_j}^*}{c^2 k_{AS_j,z}^m} + i(a_{S_j} - a_{AS_j}) \right]^2 + \right. \\ \left. + \Delta k_j^2 - 2\Delta k_j \left[ i(a_{S_j} - a_{AS_j}) + \frac{2\pi\omega_{S_j}^2 |E_L|^2 \chi_{S_j}}{c^2 k_{S_j,z}^m} + \frac{2\pi\omega_{AS_j}^2 |E_L|^2 \chi_{AS_j}^*}{c^2 k_{AS_j,z}^m} \right] \right)^{1/2} \}. \quad (25)$$

Először tegyük fel, hogy  $\Delta k_j = 0$  és nincs diszperzió

$$\left( \frac{\omega_{S_j}^2 \chi_{S_j}}{k_{S_j,z}^m} \approx \frac{\omega_{AS_j}^2 \chi_{AS_j}}{k_{AS_j,z}^m}; a_{S_j} = a_{AS_j} = a \right).$$

Ekkor  $\Delta K_j^{(0)\pm} = ia$ . A megfigyelés szerint az anti-Stokes hullám exponenciálisan erősödik a távolsággal, míg  $\Delta K_j^{(0)} = ia$  esetén az erősödés, kis távolságoknál, csak négyzetes. Ezért  $\Delta k_j$ -nek nem szabad pontosan nullának lennie [1]. A  $\Delta K_j^{(0)\pm}$  fizikai jelentésének megvilágításához továbbra is tegyük fel, hogy a diszperzió elhanyagolható, de  $\Delta k_j \neq 0$ . Ekkor

$$\Delta K_j^{(0)\pm} = \frac{1}{2} \Delta k_j + ia \pm \left[ \frac{1}{4} \Delta k_j^2 - \frac{2\pi\omega_{S_j}^2 |E_L|^2 \chi_{S_j}}{c^2 k_{S_j,z}^m} \Delta k_j \right]^{1/2}. \quad (26)$$

Ha

$$\Delta k_j \gg \frac{2\pi\omega_{S_j}^2 |E_L|^2 \chi_{S_j}}{c^2 k_{S_j,z}^m},$$

akkor

$$\Delta K_j^{(0)+} = ia + \Delta k_j - \frac{2\pi\omega_{S_j}^2 |E_L|^2 \chi_{S_j}}{c^2 k_{S_j,z}^m} + \dots \quad (27)$$

és

$$\Delta K_j^{(0)-} = ia + \frac{2\pi\omega_{S_j}^2 |E_L|^2 \chi_{S_j}}{c^2 k_{S_j,z}^m} + \dots$$

A második, negatív indexű gyök, majdnem tisztán Stokes jellegű (ld. (14) egyenletet), míg az első, majdnem tisztán anti-Stokes jellegű hullámnak felel meg, amely azonban mindig csillapított. Kis  $\Delta k_j$ -nél, közel a lineáris fázisillesztett irányhoz, a csatolás a Stokes és anti-Stokes hullám között nagyon erőssé válik. Ebben az esetben pontos eredményt a (25) alatti egyenlet szolgáltatja.

A legáltalánosabb eset vizsgálatához ki kell fejteni a (23) determinánst. Ezt célszerű  $4 \times 4$ -es aldeterminánsokként elvégezni a Laplace-féle kifejtési szabály szerint, a bal felső aldeterminánssal kezdve. Így 62 db nem nulla aldetermináns-szorzatot kapunk, amelyet tovább fejtvé és elvégezve a szükséges műveleteket egy rendkívül bonyolult egyenlethez jutunk, amelynek alakja:

$$j_1 \Delta K_1^2 \Delta K_2^2 + j_2 \Delta K_1^2 \Delta K_2 + j_3 \Delta K_1^2 + j_4 \Delta K_1 + j_5 \Delta K_2 + j_6 \Delta K_2^2 + j_7 \Delta K_2^2 \Delta K_1 + j_8 \Delta K_1 \Delta K_2 + \\ + j_9 + \prod_{i=1}^2 (e_{S_i} e_{AS_i}^* - e_{AS_i S_i} e_{S_i AS_i}^*) (e_{S_i}^* e_{AS_i} - e_{AS_i S_i}^* e_{S_i AS_i}) = 0, \quad (28)$$

ahol a zárójelben levő kifejezésnél is csak a négyzetes tagokig megyünk el és  $j_i$ -k csak a molekulák paramétereitől függenek.

A (28) egyenlet megoldását számítógéppel lehet elvégezni. Például, ha a (28) egyenletben levő zárójeles kifejezés megoldását ismerjük a kölcsönhatás nélküli esetben, akkor ezt a megoldást beírva a kölcsönhatást leíró tagokba (a zárójelen kívüli tagokba) a  $\Delta K_j$ -re egy közelítő megoldást kapunk.

A kapott megoldással meg lehet adni az  $\vec{E}_{Sj}$ ,  $\vec{E}_{ASj}$  térerősségek közelítő értékét, amelyekből a molekulák „alapvonalainak” intenzitása számítható.

## IRODALOM

- [1] N. BLOEMBERGEN, Y. R. SHEN: Phys. Rev. 137, 1787, (1965).
- [2] F. PINTÉR, L. VIZE, L. GÁTI, T. ÁSZTALOS: Acta Phys. et Chem., 28, 3—4, 123—127, (1982), Szeged.
- [3] J. A. ARMSTRONG, N. BLOEMBERGEN, J. DUCUING, P. S. PERSHAN: Phys. Rev., 127, 1918, (1962).
- [4] E. WEBER: Raman Spectroscopy of Gases and Liquids, Springer-Verlag, 1979.
- [5] H. J. ZEIGER, P. E. TANNENWALD, S. KERN, R. HERENDEEN: Phys. Rev. Lett., 11, 419, (1963).

## BEITRÄGE ZUR THEORIE DER ERZWUNGENEN RAMAN—STREUUNG ZUSAMMENGESETZTER SYSTEME

FERENC PINTÉR—FERENC SERES—LÁSZLÓ VIZE—LÁSZLÓ GÁTI

Bei der Erklärung des erzwungenen Raman-Streuungsspektrums zweiteiliger Flüssigkeitsgemische aufgrund des Kombinationsprinzips fanden wir, dass ein Teil der vorausgesagten Linien fehlt. Die Ursache hierfür ist die Verschiedenheit der auf die einzelnen Linien bezüglichen Verstärkungs- bzw. Verlustfaktoren. Nach Errechnung der Verstärkungsfaktoren der erstrangigen Stokes-Linien haben wir eine Relation bezüglich des eine maximale Linienzahl sichernden Konzentrationsquotienten abgeleitet. Unter Berücksichtigung der Koppelung zwischen den Stokes- und Anti-Stokes-Wellen haben wir die zur *rechenautomatischen* Lösung des Problems in allgemeineren Rahmen erforderlichen prinzipiellen Grundlagen erarbeitet.

## К ТЕОРИИ ВЫНУЖДЕННОГО РАССЕЯНИЯ — РАМАНА МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ

ФЕРЕНЦ ПИНТЕР—ФЕРЕНЦ ШЕРЕШ—ЛАСЛО ВИЗЕ—ЛАСЛО ГАТИ

Опираясь на комбинационный принцип, спектр вынужденного рассеяния Рамана многокомпонентных жидких смесей, мы наблюдали, что отсутствует часть прогнозированных линий. Причиной этого является различие факторов усиления и потерь, относящихся к отдельным линиям. Вычислявая факторы усиления линии Штокеса первого порядка, мы вывели взаимосвязь для пропорции концентрации, обеспечивающей максимальное количество линий. Учитывая связь между волнами и антиволнами Штокеса, мы разработали принципиальные основы, необходимые в решении (с помощью вычислительной техники) проблемы в ее общих рамках.





# OLDÓSZERHATÁS VIZSGÁLATA A SCHIFF-BÁZISOK AMINC SERÉJÉNÉL, IV.

## N-(2-HIDROXI-1-NAFTILIDEN)ANILIN ÉS n-BUTIL-AMIN REAKCIÓJÁNAK AKTIVÁLÁSI PARAMÉTEREI ETANOL-BENZOL OLDÓSZERELEGYSBEN

NAGY PÁL és HERZFELD ROZÁLIA

Korábbi közleményeinkben [1, 2, 3, 4] beszámoltunk az aldehidgyűrű o-helyzetben OH-csoportot tartalmazó Schiff-bázisok és alifás primer aminok között oldószerelegysben, 25 °C-on lejátszódó amincsere vizsgálati eredményeiről. Etanol-benzol és etanol-ciklohexán elegysben végzett mérésekkel [1, 2, 3] megállapítottuk, hogy apoláris oldószersben a reakció sebessége igen kicsi, de az etanolkoncentráció növelésével a sebességi állandó gyorsan nő. A vizsgált oldószerelegys összetétele és a sebességi állandó közötti kapcsolat igen jól leírható az alábbi egyenlettel:

$$\lg k = x_2 \lg k_1^* + x_2 \lg k_2^* + x_1 x_2 (a + b \gamma_1) \quad (1)$$

ahol  $k_1^*$ ,  $k_2^*$  az etanolban és benzolban, illetve ciklohexánban mért sebességi állandó;  $x_1$ ,  $x_2$  az etanol és benzol, illetve ciklohexán móltörtje;  $\gamma_1$  az etanol aktivitási koefficiense az elegysben. Az (1) egyenlet érvényességét úgy értelmeztük, hogy a tapasztalt, igen jelentős oldószershatást hidrogénkötésekkel kialakuló solvatáció okozza.

1,2 diklóretán-benzol elegysben vizsgálva az amincseret [4], a sebességi állandó változása az elegys relatív permittivitásával hozható kapcsolatba [5]:

$$\lg k = \lg k_0 + \frac{\epsilon - 1}{2\epsilon + 1} \cdot A \quad (2)$$

Az eddigi eredményeket, tapasztalatokat vizsgálva megállapítható, hogy az (1) egyenlet formailag megfelel a

$$Y = x_1 Y^* + x_2 Y^* + x_1 x_2 B \quad (3)$$

empirikus összefüggésnek, melyet gyakran használnak az elegys összetétele és valamely termodinamikai jellemzője ( $Y$ ) közötti kapcsolat leírására. Az Eyring egyenletet [6] figyelembe véve viszont a sebességi állandó logaritmus a aktiválási szabadentalpiával helyettesíthető, s így az (1)-ből nyert összefüggés az aktiválási szabadentalpia és az etanol aktivitási koefficiense közötti kapcsolatot fejezi ki a vizsgált oldószerelegysben. Ilyen összefüggést eddig még nem írtak le, márpedig ez fontos új adatot jelenthet az oldószershatás további megismeréséhez. Ezért vizsgáltuk az amincsere hőmérsékletfüggését és a kísérleti adatokból meghatároztuk az amincsere aktiválási paramétereit, illetve azok függését az oldószerelegys összetételétől.

## Kísérleti módszer

A reakciót spektrofotometriás módszerrel követtük, miután az N-(2-hidroxi-1-naftiliden)anilin és a reakcióban keletkező N-(2-hidroxi-1-naftiliden)butilamin elnyelési görbéje jelentősen különbözik [1]. 460 nm-nél mértük a reakcióelegy abszorpcióját és a keletkező Schiff-bázis mindenkor koncentrációját az

$$x = \frac{(E_k - E)b_0}{E_k - E_0} \quad (4)$$

egyenlettel számoltuk, ahol  $b_0$  a kiindulási Schiff-bázis kezdeti koncentrációja,  $E_k$  a  $t=0$ ,  $E$  a reakcióban és  $E_0$  a reakció végén mért fényelnyelés. A méréshez használt anyagokat a reakció beindítása előtt a megfelelő hőmérsékleten temperáltuk és a fényelnyelést fűthető küvetartóban VSU 2P spektrofotométerrel mértük.

A n-butyl-amint a kiindulási Schiff-bázisnál tízszer nagyobb koncentrációban alkalmaztuk, így a reakció gyakorlatilag teljesen lejártszódott. A sebességi állandókat másodrendnek megfelelően számoltuk.

A Schiff-bázist a komponensek etanolos oldatának összeöntésével állítottuk elő, majd átkristályosítással tisztítottuk. A „Merck” gyártmányú n-butyl-amint minden beméréshez frissen desztilláltuk. A kereskedelembe kapható abs. etanolt és benzolt tovább tisztítottuk és víztelenítettük.

## Kísérleti eredmények

A különböző összetételű etanol-benzol elegyekben 298,16; 303,16; 308,16; 313,16 K-en meghatározott sebességi állandókat az 1. táblázatban foglaltuk össze.

1. táblázat

N-(2-HIDROXI-1-NAFTILIDEN)ANILIN ÉS n-BUTYL-AMIN KÖZÖTTI REAKCIO  
SEBESSÉGI ÁLLANDÓJA ETANOL-BENZOL OLDÓSZERELEGYSÉGEK, KÜLÖNBÖZŐ HŐMÉRSÉKLETEN

$x_{\text{etanol}}$	$k, \text{dm}^3 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$			
	298,16 K	303,16 K	308,16 K	313,16 K
0,000	$8,83 \cdot 10^{-4}$	—	$1,22 \cdot 10^{-3}$	$1,39 \cdot 10^{-3}$
0,038	—	$3,15 \cdot 10^{-2}$	$3,82 \cdot 10^{-2}$	$4,30 \cdot 10^{-2}$
0,074	$5,50 \cdot 10^{-2}$	$6,52 \cdot 10^{-2}$	$7,70 \cdot 10^{-2}$	$(8,22 \cdot 10^{-2})$
0,145	$8,48 \cdot 10^{-2}$	$9,97 \cdot 10^{-2}$	$1,18 \cdot 10^{-1}$	$1,37 \cdot 10^{-1}$
0,276	$1,25 \cdot 10^{-1}$	$1,52 \cdot 10^{-1}$	$1,76 \cdot 10^{-1}$	$2,11 \cdot 10^{-1}$
0,395	$1,74 \cdot 10^{-1}$	$2,09 \cdot 10^{-1}$	$2,59 \cdot 10^{-1}$	$2,75 \cdot 10^{-1}$
0,504	$2,15 \cdot 10^{-1}$	$2,71 \cdot 10^{-1}$	$3,22 \cdot 10^{-1}$	$3,54 \cdot 10^{-1}$
0,604	$2,86 \cdot 10^{-1}$	$3,37 \cdot 10^{-1}$	$4,11 \cdot 10^{-1}$	$4,69 \cdot 10^{-1}$
0,696	$3,82 \cdot 10^{-1}$	$4,51 \cdot 10^{-1}$	$5,29 \cdot 10^{-1}$	$6,29 \cdot 10^{-1}$
0,781	$4,69 \cdot 10^{-1}$	$5,62 \cdot 10^{-1}$	$(6,91 \cdot 10^{-1})$	$7,81 \cdot 10^{-1}$
0,859	$6,36 \cdot 10^{-1}$	$7,36 \cdot 10^{-1}$	$8,83 \cdot 10^{-1}$	1,05
0,932	$7,75 \cdot 10^{-1}$	$9,25 \cdot 10^{-1}$	1,12	1,28
1,000	$9,60 \cdot 10^{-1}$	1,20	1,45	1,68

A különböző hőmérsékleten meghatározott sebességi állandók ismeretében a reakció aktiválási entalpiáját és entrópiáját a legkisebb négyzet módszert alkalmazva az alábbi egyenlettel [6]:

$$k = \frac{RT}{N_A h} \cdot e^{\frac{\Delta S^\ddagger}{R}} \cdot e^{\frac{-\Delta H^\ddagger}{RT}} \quad (5)$$

illetve

$$\lg \frac{k}{T} = 10,319 + \frac{\Delta S^\ddagger}{19,145} - \frac{\Delta H^\ddagger}{19,145 T} \quad (6)$$

majd a 298,16 K-re vonatkozó aktiválási szabadentalpiát a

$$\Delta G^\ddagger = \Delta H^\ddagger - 298,16 \Delta S^\ddagger \quad (7)$$

összefüggéssel számítottuk. Az eredményeket a 2. táblázatban tüntettük fel. A (6) egyenlet igen jó érvényességét az 1. ábra szemlélteti.

2. táblázat

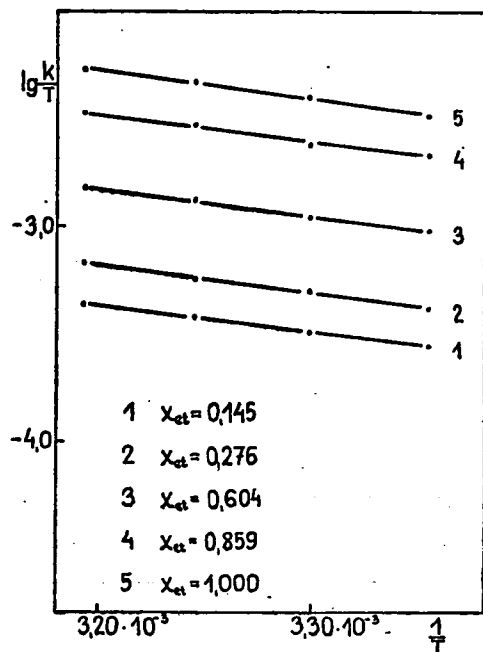
N-(2-HIDROXI-1-NAFTILIDEN)ANILIN n-BUTIL-AMINNAL  
LEJÁTSZÓDÓ AMINCSEREJÉNEK AKTIVÁLÁSI PARAMÉTEREI  
ETANOL-BENZOL OLDÓSZERELEGYBEN

$x_{\text{etanol}}$	$\Delta H^\ddagger$ kJ · mol <sup>-1</sup>	$-\Delta S^\ddagger$ J · mol <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>	$-298,16 \cdot \Delta S^\ddagger$ kJ · mol <sup>-1</sup>	$\Delta G^\ddagger$ kJ · mol <sup>-1</sup>
0,000	21,01	233	69,47	90,48
0,038	21,89	202	60,23	82,12
0,074	23,19	191	56,95	80,14
0,145	22,36	190	56,65	79,01
0,276	24,17	181	53,97	78,14
0,395	22,19	185	55,16	77,35
0,504	23,34	179	53,37	76,71
0,604	23,48	177	52,77	76,25
0,696	23,06	176	52,48	75,54
0,781	23,72	172	51,28	75,00
0,859	23,52	170	50,69	74,21
0,932	23,69	168	50,09	73,78
1,000	26,45	156	46,51	72,96

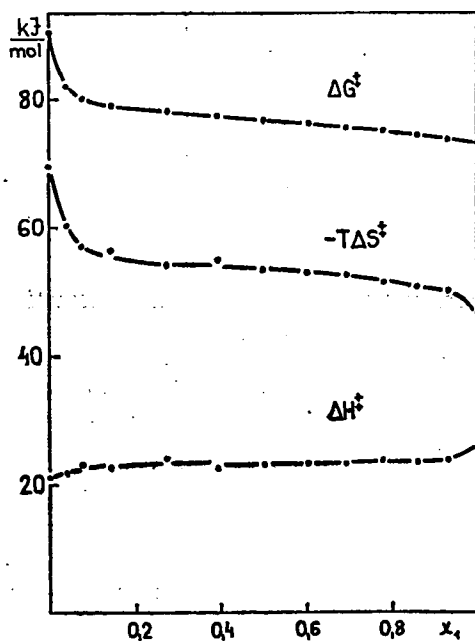
Az aktiválási paraméterek változását az oldószerkeleg összetételével a 2. ábra szemlélteti.

A 2. ábráról, illetve a 2. táblázatból megállapítható, hogy az amincsere aktiválási entalpiája 22—23 kJ · mol<sup>-1</sup> körüli értékkel csaknem független az oldószerkeleg összetételétől. Csupán a tiszta benzolban, illetve etanolban meghatározott adatok térnek el kissé ettől az értéktől.

A reakció aktiválási entrópiája jelentős nagyságú, negatív előjelű és az etanol-koncentráció növelésével egyértelműen nő, vagyis mind kisebb negatív értéke. A negatív aktiválási entrópia összhangban van azzal, hogy a reakció bimolekulás. Az additíve keletkező átmeneti komplexben ugyanis a kiindulási anyagokhoz képest csökken a mozgási lehetőség, s így csökken a rendszer entrópiája [7].  $\Delta S^\ddagger$  függése az oldószerkeleg összetételétől azzal magyarázható, hogy az átmeneti komplex polárisabb, mint a kiindulási anyagok, s ez növeli az oldószer rendezettségét, ami további jelentős entrópia csökkenést eredményez. A rendezettség viszonylagos növekedése legnagyobb a különben kevésbé rendezett apoláris oldószerben és legkisebb a már eleve is



1. ábra. A (6) egyenlet alkalmazása *N*-(2-hidroxi-1-naftiliden)anilin és *n*-butil-amin reakciójára, különböző összetételű etanol-benzol oldószerelegyekben



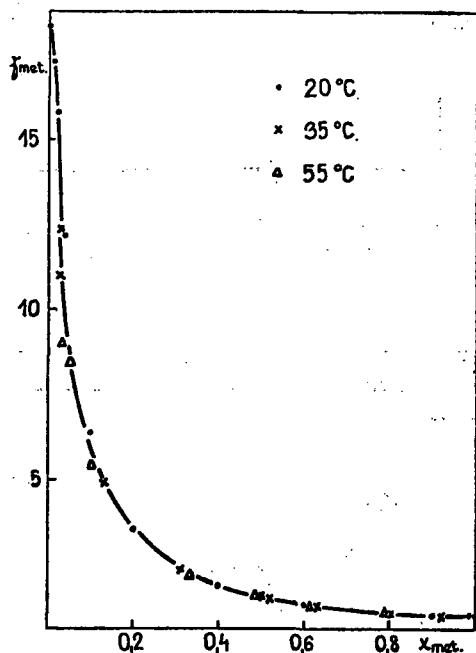
2. ábra. *N*-(2-hidroxi-1-naftiliden)anilin és *n*-butil-amin közötti amincseré aktiválási paramétereinek változása az etanol móltörtjének függvényében, etanol-benzol oldószerelegyen.  $T = 298,16 \text{ K}$

jelentős mértékben rendezett etanolban [8]. Így etanol-benzol elegyekben  $\Delta S^\ddagger$  annál kisebb negatív érték, minél nagyobb az etanolkoncentráció.

Az aktiválási szabadentalpia az etanol-koncentráció növelésével csökken, ami  $\Delta H^\ddagger$  és  $\Delta S^\ddagger$  értékét figyelembe véve a (7) egyenletből is következik.  $\Delta G^\ddagger$  csökkenését — s így a sebességi állandó növekedését — a Hughes—Ingold szabály szerint [9] az okozza, hogy az átmeneti komplex erősebben solvatólódik, mint a kiindulási anyagok. Ez összhangban van az előzőekkel és megfelel a javasolt reakciómechanizmusnak is [10]. A feltételezett geminális diamin átmeneti komplex ugyanis polárisabb, mint a kiindulási anyagok, és ezért különösen protonos oldószerekben azoknál jobban solvatólódik.

A továbbiakban megvizsgáltuk, hogy az (1) egyenlet érvényessége függ-e a hőmérséklettől. Ennek eldöntéséhez természetesen ismerni kellene etanol-benzol elegyben az etanol aktivitási koefficiensét különböző hőmérsékleten. Ilyen adatokat azonban nem találtunk az irodalomban. Vannak viszont mérési eredmények metanol-benzol elegyre [11] és e szerint a metanol aktivitási koefficiense lényegében független a hőmérséklettől (3. ábra). Mivel az etanol-benzol és a metanol-benzol elegy sok szempontból hasonló tulajdonságú, feltételeztük, hogy etanol-benzol elegyben az etanol aktivitási koefficiense számottevően szintén nem függ a hőmérséklettől. Ezért az 1. táblázat adataiból, az (1) egyenletnek megfelelően számított

$$\frac{\lg k - (x_1 \lg k_1^* + x_2 \lg k_2^*)}{x_1 x_2} = \frac{\delta \lg k}{x_1 x_2} \quad (8)$$



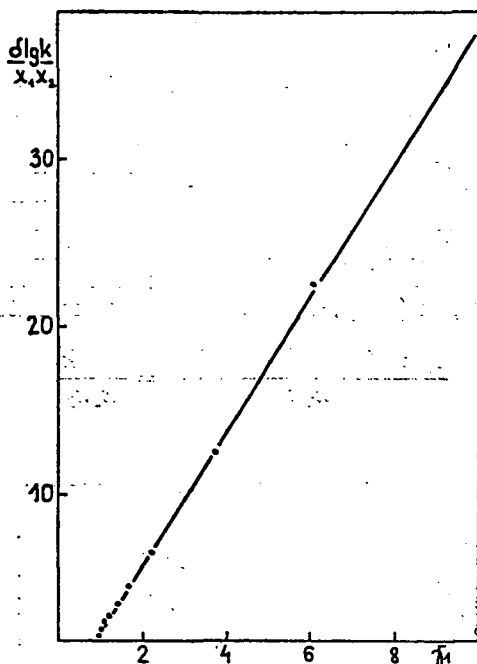
3. ábra.

A metanol aktiválási koefficiense különböző hőmérsékleten, metanol-benzol oldószerelegyen [11]

értékeket az etanol 25 °C-ra meghatározott aktivitási koefficiensének [12] függvényében vizsgáltuk. Az adatok a

$$\frac{\delta \lg k}{x_1 x_2} = a + b\gamma_1 \quad (9)$$

összefüggés szerint igen jó közelítéssel egyenest határoznak meg (4. ábra) és a különböző hőmérsékletre vonatkozó adatok egy egyenesre esnek. Ennek megfelelően



4. ábra. A (9) egyenlet alkalmazása *N*-(2-hidroxi-1-naftiliden)anilin és *n*-butil-amin reakciójára, etanol-benzol oldószerkelemben.  $T=313,3 \text{ K}$

nagyon jó korrelációt mutatnak a legkisebb négyzet módszerrel számított regressziós egyenletek is, illetve a különböző hőmérsékletre vonatkozó adatokból számított egyenletek közel azonosak.

$$298,16 \text{ K} \quad \frac{\delta \lg k}{x_1 x_2} = -2,333 + 4,078\gamma_1 \quad n = 10 \\ r = 0,9991$$

$$303,16 \text{ K} \quad \frac{\delta \lg k}{x_1 x_2} = -2,298 + 4,042\gamma_1 \quad n = 11 \\ r = 0,9997$$

$$308,16 \text{ K} \quad \frac{\delta \lg k}{x_1 x_2} = -2,308 + 4,028\gamma_1 \quad n = 11 \\ r = 0,9996$$

$$313,16 \text{ K} \quad \frac{\delta \lg k}{x_1 x_2} = -2,291 + 4,001 \gamma_1 \quad n = 11 \\ r = 0,9999$$

Az (1), illetve a (8), (9), valamint a

$$k = \frac{RT}{N_A h} \cdot e^{\frac{-\Delta G^\ddagger}{RT}} \quad (10)$$

egyenletek alapján, az etanol-benzol oldószerkeletben lejátszódó amincsere aktiválási szabadentalpiája is korrelációban van az etanol aktivitási koefficiensével. (10)-et (8)-ba helyettesítve, a regressziós egyenlet:

$$-\frac{\delta \Delta G^\ddagger}{2,3RTx_1 x_2} = a + b\gamma_1 \quad (11)$$

ahol

$$-\delta \Delta G^\ddagger = \Delta G^\ddagger - (x_1 \Delta G_1^\ddagger + x_2 \Delta G_2^\ddagger) \quad (12)$$

és  $\Delta G_1^\ddagger$  a tiszta etanolban,  $\Delta G_2^\ddagger$  a tiszta benzolban,  $\Delta G^\ddagger$  az elegyben lejátszódó reakció aktiválási szabadentalpiája. Ezek értékét a vizsgált hőmérsékletekre a 2. táblázat adataiból a (7)-nek megfelelő egyenlettel számítottuk ki. A (11) egyenlet  $a$  és  $b$  állandóját az előzőekhez hasonlóan a legkisebb négyzet módszerrel határoztuk meg és az adatokat a 3. táblázat szemlélteti.

3. táblázat

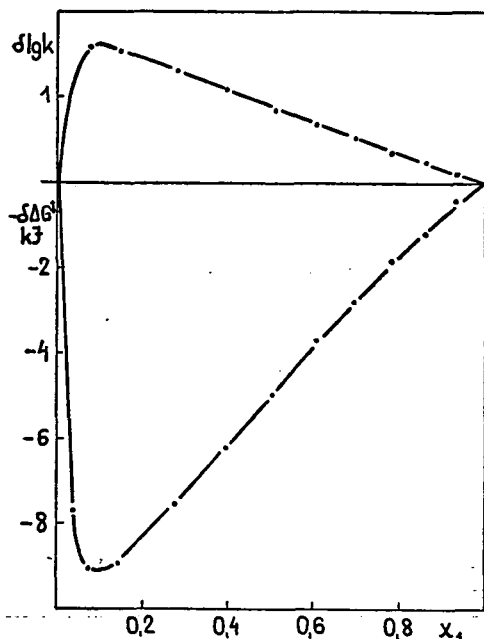
A (11) REGRESSZIÓS EGYENLET  $a, b$  KONSTANSAI ÉS A KORRELÁCIÓS EGYÜTTTHATÓ ( $r$ ) KÜLÖNBÖZŐ HŐMÉRSÉKLETRE SZÁMÍTVA

K	$a$	$b$	$n$	$r$
298,16	-2,329	3,989	11	0,9996
303,16	-2,370	4,004	11	0,9991
308,16	-2,411	4,014	11	0,9989
313,16	-2,456	4,030	11	0,9989

Látható, hogy a korreláció igen jó, illetve az  $a, b$  állandók jól egyeznek a (9) összefüggés szerint meghatározott értékekkel.

A továbbiakban megvizsgáltuk  $\delta \lg k$  és  $\delta \Delta G^\ddagger$  változását az oldószerkelet összetételének függvényében. A (10) egyenlet alapján az nyilvánvaló, hogy ha  $\delta \lg k$  értéke pozitív, akkor  $\delta \Delta G^\ddagger$  negatív előjelű és  $\Delta G^\ddagger$  kisebb, mint ami az additivitásból adódna. Sajátosan változnak azonban e mennyiségek az etanol móltörtjének függvényében, amint ezt az 5. ábra szemlélteti. Látható, hogy az additivástól való eltérés maximum, illetve minimum görbe mentén változik és a szélsőértékek  $x_1=0,1$  körül vannak. E tapasztalat az etanolmolekulák asszociációjának változásával hozható kapcsolatba. Ismeretes ugyanis, hogy etanolhoz benzolt (általában alkoholhoz apoláris oldószert) adva, csökken az etanolmolekulák asszociációja, s így nő a „sza-

bad” alkoholmolekulák viszonylagos koncentrációja. Ez viszont a vizsgált folyamatban növeli a Schiff-bázis és az oldószer közötti hidrogénkötés kialakulásának lehetőségét, s ennek eredményeként az amincsere sebessége nagyobb lesz, mint ami az etanolkoncentráció nagyságából az additivitás szerint következne. Megjegyzendő, hogy etanol-benzol elegyben az etanol parciális gőznyomásának eltérése az ideálistól, szintén az 5. ábrának megfelelően változik, ami összhangban van a fentiekkel, illetve az (1) egyenlet érvényességével.



5. ábra.  $\lg k$  és  $-\Delta G^\ddagger$  változása az etanol móltörtjének függvényében *N*-(2-hidroxi-1-naftiliden)-anilin és *n*-butil-amin reakciójánál, etanol-benzol oldószerelegyben.  $T = 298,16 \text{ K}$

### Összefoglalás

*N*-(2-hidroxi-1-naftiliden)anilin és *n*-butil-amin reakcióját vizsgáltuk etanol-benzol oldószerelegyben, különböző hőmérsékleten. Kiszámítottuk az aktiválási paramétereket és értelmeztük az oldószer összetételétől függő változásukat. Kapcsolatot állapítottunk meg a reakció aktiválási szabadentalpiája és az oldószer-elegyben az etanol aktivitási koefficiense között.



- [1] NAGY P.: Juhász Gyula Tanárképző Főisk. Tud. Közl. 114. 1982.
- [2] NAGY P.: Acta Chim. Acad. Sci. Hung., 112. 461. 1983.
- [3] GULYÁS I., NAGY P.: Magy. Kém. Lapja, 39. 234. 1984.
- [4] NAGY P.: Acta Acad. Paed. Szeged Ser. Phys.-Chem.-Math. 35. 1983.
- [5] LAIDLER K. J., EYRING H.: Am. New York Acad. Sci., 39. 303. 1940.
- [6] EYRING H.: J. Chem. Physics, 3. 107. 1935.
- [7] SCHWETLICH K.: Reakciómechanizmusok kinetikai vizsgálata, Műszaki Könyvkiadó, Bp. 1978. 105. old.
- [8] COX H. E.: J. Chem. Soc. (London), 119. 142. 1921.
- [9] HUGHES E. D., INGOLD C. K.: J. Chem. Soc. (London), 244. 1935.
- [10] KOEHLER K., SANDSTROM W., CORDES E. H.: J. Amer. Chem. Soc. 86. 2413. 1964.
- [11] LANDOLT—BÖRNSTEIN: Physikalische-chemische Tabellen, 6. auflage, Zweiter band, 2 Teil, Bandteil a, 475.
- [12] NAGY L. GY., SCHAY G.: Magy. Kém. Folyóirat, 70. 33. 1964.

## UNTERSUCHUNG DER LÖSUNGSMITTELWIRKUNG BEIM AMINAUSTAUSCH DER SCHIFF-BASEN, IV.

### DIE AKTIVIERUNGSPARAMETER DER REAKTION VON N-(2-HYDROXY-1-NAPHTHYLIDEN)ANILIN UND n-BUTYL-AMIN IN AETHANOL-BENZOL-LÖSUNGSMITTELGEMISCHEN

PÁL NAGY UND ROZÁLIA HERZFELD

Es wurden die Reaktion von N-(2-Hydroxy-1-Naphthyliden)anilin und n-Butyl-amin im Aethanol-Benzol-Lösungsmittelgemisch bei verschiedenen Temperaturen untersucht, die Aktivierungsparameter errechnet und deren von der Lösungsmittelzusammensetzung abhängige Veränderung bewertet. Dabei ergab sich ein Zusammenhang zwischen der freien Aktivierungsenthalpie der Reaktion und dem Aktivitätskoeffizienten des Aethanol im Lösungsmittelgemisch.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАСТВОРИТЕЛЯ НА АМИНООБМЕН. IV.

### ПАРАМЕТРЫ АКТИВАЦИИ РЕАКЦИИ N(2-ГИДРООКИСЬ-1- НАФТИЛИДЕН)АНИЛИН И N-БУТИЛ-АМИНА В СМЕСИ РАСТВОРИТЕЛЯ ЭТАНОЛ-БЕНЗОЛА

ПАЛ НАДЬ—РОЗАЛИЯ ХЕРЦФЕЛЬД

В различных температурных условиях мы проводили исследование реакции N(2-гидроокись-1-нафтилиден)анилин и n-бутил-амин в смеси растворителя этанол-бензола. Мы высчитали параметры активации и определяли изменения в зависимости от состава растворителя. Мы установили связь между свободной энтальпией и коэффициентом активации этанола в смеси растворителя.



## A VALÓS SZÁMOK TIZEDESTÖRTKÉNT VALÓ BEVEZETÉSE

HERBERT LUGOWSKI

Az (5) alatti dolgozatban a nem-negatív racionális számok  $Q_+$  félteste bevezetésénél egy olyan strukturális leírást tárgyaltunk, amely a tanításban alkalmazott aritmetikán kívüli indoklást és az aritmetika belső sajátosságaiból adódó eljárást egyaránt tartalmazza. Ez a tanár szakmai tájékozottságát szolgálja, ami a módszer-tani felkészültségének az alapja. Ebben a dolgozatban azt mutatjuk meg, hogy teljesen hasonlóan lehetséges a  $Q_+$ -nak a nem-negatív valós számok  $R_+$  féltestévé való bővítése. Rövidség kedvéért a teljes részletezéstől eltekintünk, s csak az elvi meggondolások vázolására korlátozódunk. Megjegyezzük azonban, hogy a szükséges részletbizonyítások viszonylag könnyen elvégezhetők.

### 1. Aritmetikán kívüli motiváció

Kiindulási pontunk annak megállapítása, hogy az [5]-ben tekintett

$$f_{Q_+}: Q_+ \rightarrow S(a \mapsto ae)$$

leképezés, amely  $Q_+$ -t egy  $g$  egyenes egybevágó szakaszaiból álló osztályainak természetesen rendezett  $S$  félmodulusába képezi le, s minden  $a(\in Q_+)$ -hoz az  $e = \overline{OE}$  egységszakasznak az  $ae$  törtszámú többszörösét rendeli, nem szürjektív.

Ismert például, hogy az egységnégyzetnek a  $\xi$  átlója itt nem fordul elő képként. Hogy ennek okát megmagyarázzassuk, vezessük be a rendezett halmazok elméletéből a következő fogalmakat.

Egy rendezett  $(M, <)$  halmazban ennek két nemüres  $X$  és  $X'$  részhalmaza egy  $(X/X')$  *szeletpárt* alkot  $M$ -ben, ha minden  $x \in X$ ,  $x' \in X'$  esetén  $x \leq x'$  teljesül (röviden  $X \leq X'$ ). *Dedekind-szelet* (röviden *D-szelet*) egy olyan  $(X/X')$  szeletpár, amelyre  $X \cap X' = \emptyset$  és  $X \cup X' = M$ . Az  $s \in M$  elem az  $(X/X')$ -nek *szeleteleme*, ha  $X \leq s \leq X'$ . Ha  $s$  egyértelműen meghatározott, akkor ezt  $s \triangleq (X/X')$  jelöli. Az  $M$  halmazt *sűrűnek* mondjuk, ha minden olyan  $a, b \in M$  elemhez, amelyre  $a < b$  teljesül, létezik olyan  $x \in M$ , amelyre  $a < x < b$  teljesül.  $M$ -et *folytonosnak* mondjuk, ha  $M$  sűrű és  $M$ -ben minden  $(X/X')$  szeletpárnak van szeleteleme  $M$ -ben. (Megemlítjük, hogy ezzel ekvivalens az, hogy minden  $D$ -metszetnek  $M$ -ben van metszeteleme, ill. hogy  $M$  minden nemüres, felülről korlátos részhalmazának van szuprémiума  $M$ -ben, ill. hogy  $M$  minden nemüres, alulról korlátos részhalmazának van infimuma  $M$ -ben.)

A geometria szisztematikus felépítésével megkövetelt Cantor—Dedekind-féle folytonossági axióma szerint  $(S, <)$  folytonos halmaz;  $(Q_+, <)$  azonban nem folytonos, mivel például az

$$X := \{x | x \in Q_+ \wedge x^2 < 2\}, \quad X' := \{x | x \in Q_+ \wedge x^2 > 2\}$$

részalmazokból álló  $(X, X')$  szeletpárnak  $Q_+$ -ban nincs szeleteleme, így az előbb említett  $\xi \in S$  szakasz nem racionálisan mérhető. Ez motiválja  $Q_+$ -nak egy folytonos  $A$  számhalmazzá való bővítését, amelynek a struktúráját úgy kell megkonstruálni, hogy  $S$  a  $Q_+$  félmodulusból (l. [2]-t)  $A$ -félmodulussá váljék, tehát a következő többszörözési szabályok teljesüljenek ( $\alpha, \beta \in S$ ;  $a, b \in A$ ;  $S^* = S/\{0\}$ ,  $A^* = A/\{0\}$ ):

$$V1 \quad \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha\alpha = \alpha\beta \quad (\alpha \in A^*),$$

$$V2 \quad \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\alpha < \alpha\beta \quad (\alpha \in A^*),$$

$$V3 \quad a(\alpha + \beta) = \alpha\alpha + \alpha\beta,$$

$$V4 \quad a = b \Leftrightarrow \alpha\alpha = \alpha b \quad (\alpha \in S^*),$$

$$V5 \quad a < b \Leftrightarrow \alpha\alpha < \alpha b \quad (\alpha \in S^*)$$

$$V6 \quad (a + b)\alpha = \alpha\alpha + \alpha b,$$

$$V7 \quad (a \cdot b)x = a(bx).$$

A következőkben alkalmazzuk azt a struktúraelméleti tételt, amely szerint mindent természetesen rendezett folytonos  $A = (A, <, +)$  félmodulus (például  $S$ ) a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1.  $A$  archimédészi, azaz az  $\alpha \in A$  és  $\beta \in A^*$  elemekhez van olyan  $n \in N^*$ , amelyre  $n\beta = \alpha$ .
2.  $A$  osztható, azaz  $\alpha \in A$  és  $n \in N^*$  elemekben létezik olyan  $\xi \in A$ , amelyre  $n\xi = \alpha$ ; ennél fogva  $A$   $Q_+$ -félmodulus.
3. Minden  $\alpha \in A^*$  elemre a  $Q_+ \cdot \alpha := \{r\alpha \mid r \in Q_+\}$  részalmaz sűrű  $A$ -ban, azaz ha  $\xi, \eta \in A$ , és  $\xi < \eta$ , akkor létezik olyan  $r \in Q_+$ , amelyre  $\xi < r\alpha < \eta$ .

## 2. Végtelen tizedestörtek mint mérőszámok

Már a racionális számok tízes számrendszerbeli előállításához szükségünk van az  $a = a_0, a_1 a_2 \dots$ ; végtelen tizedestört fogalmára, amin egyszerűen az  $a_0, a_1, a_2, \dots$  ( $0 \leq a_i \leq 9$ ;  $i \geq 1$ ) természetes számok egy sorozatát értjük. Az összes (9-es periódus nélküli) végtelen tizedestörtek halmazát  $R_+$  jelöli. Ismert, hogy minden

$\frac{m}{n} \in Q_+$  törtnek egy osztási algoritmussal megfeleltethetünk egy

$$D\left(\frac{m}{n}\right) = a_0, a_1 \dots a_1 \overline{b_1 \dots b_k} \in R_+,$$

szakaszos tizedestörtet és a  $D: Q_+ \rightarrow R_+ \left( \frac{m}{n} \rightarrow D\left(\frac{m}{n}\right) \right)$  leképezés injektív, továbbá

ha  $\frac{m}{n}$ -et azonosítjuk  $D\left(\frac{m}{n}\right)$ -nel, akkor  $Q_+$  beágyazható  $R_+$ -ba. Minden  $a \in R_+$  tizedestörthöz van egy

$$s_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

alsó közelítő tört, és egy

$$s'_n = s_n + \frac{1}{10^n} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

felső közelítő tört. Ezt így jelöljük:  $a \triangleleft (s_n/s'_n)$ .

Érvényesek a következők:

1.  $s_0 \leq s_1 \leq s_2 =$  (monoton növekvő sorozat),
2.  $\dots \leq s'_2 \leq s'_1 \leq s'_0$  (monoton csökkenő sorozat),
3.  $s_n < s'_m$  minden  $n, m$ -re;
4. minden  $t \in Q_+$ -hoz létezik olyan  $s_n$  és  $s'_n$ , hogy  $s'_n - s_n < t$ .

Az  $(s_n)$  és az  $(s'_n)$  sorozatok tehát egy szeletpárt alkotnak  $Q$ -ban, és az  $a \in Q_+$  esetben ennek a szeletpárnak egyetlen szeleteleme az  $a$ , erre tehát mint egyetlen  $Q_+$ -beli elemre teljesül

$$\forall n (s_n \leq a \leq s'_n),$$

és ezzel  $S$ -ben mint  $Q_+$ -félmodulusban az  $\alpha \in S$  elemre

$$(*) \quad \forall n (s_n \alpha \leq a \alpha \leq s'_n).$$

Megmutatható, hogy ez általánosítható úgy, hogy minden  $\gamma \in S$  szakaszt egy tetszőleges  $\alpha \in S$  szakaszra nézve egy egyértelműen meghatározott  $a \in R_+$  tizedestörttel mérjünk:

(2a) *tétel.*

$$S \forall \gamma \in S \exists !! a \in R_+ \forall n \in N (s_n \alpha \leq \gamma \leq s'_n \alpha).$$

Megfordítva, minden  $\alpha \in S^*$ -hoz és minden  $a \in R_+$ -hoz pontosan egy  $\gamma \in S$  létezik, amely minden  $n$ -re kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

(2b) *tétel.*

$$\forall \alpha \in S \forall a \in R_+ \exists \gamma \in S \forall n \in N (s_n \alpha \leq \gamma \leq s'_n \alpha).$$

Ennélfogva  $\gamma$  az  $S$ -beli  $(s_n \alpha)$  és  $(s'_n \alpha)$  sorozatból képezett szeletpárnak egyértelműen meghatározott szeleteleme; ezért ezt röviden így írjuk:  $\gamma \triangleleft (s_n \alpha/s'_n \alpha)$  és  $\gamma$ -t az  $\alpha$  elem  $a$ -szorosának nevezzük;

(2c) *definíció.*

$$\gamma = a \alpha : \Leftrightarrow a \triangleleft (s_n/s'_n) \sim \gamma \triangleleft (s_n \alpha/s'_n \alpha).$$

(2a) és (2b)-ből, valamint az  $S$ -beli összeadás monotonításából közvetlenül következik a V4 és V3 és ezzel együtt a V2 és V1 is. A  $(*)$  képlet  $a \in Q_+$ -ra vonatkozóan azt mutatja, hogy a (2c)-ben definiált operátorszorzat  $Q_+ (\subset R_+)$ -ra ugyanaz, mint korábban. Ezzel kapjuk a következő tételt:

(2d) *tétel.* Az  $f_{R_+}: R_+ \rightarrow R_+ \varepsilon = S (a \mapsto a \varepsilon)$  leképezés bijektív és az  $f_{Q_+}$  leképezés kiterjesztése, tehát a számegyenes pontjaihoz kölcsönösen egyértelműen rendelhetők az  $R_+$ -beli végtelen tizedestörtek.

### 3. $R_+$ rendezése

Célunk az  $R_+$ -ban egy rendezés bevezetése, amely kielégíti V5-öt. Ehhez először (a  $Q_+$ -beli, ill.  $Q$ -beli eljárásához hasonlóan) az  $a\alpha < b\alpha$  állítást írjuk le az  $a = a_0, \dots, a_1 a_2 \dots$   $b = b_0, b_1 b_2, \dots \in R_+$  segítségével.

(3a) *tétel.*

- (i)  $a\alpha < b\alpha \Leftrightarrow \exists n (a_0 = b_0, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}, a_n < b_n), (\alpha \neq 0).$

Ez a tétel aritmetikán kívüli motivációt nyújt az  $R_+$ -beli rendezéshez.

(3b) *definíció.*

- (j)  $a < b \Leftrightarrow \exists n (a_0 = b_0, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}, a_n < b_n).$

Így kapjuk a következőt:

(3c) *tétel.* A (j)-ben definiált reláció *irreflexív rendezési reláció*  $R_+$ -ban, amely ún. *lexikografikus rendezés*, és a  $Q_+$ -beli rendezés *kiterjesztése*.

(3d) *következmény.*  $S$ -ben  $R_+$ -ra vonatkozóan teljesül V5, azaz az  $f_{R_+}$  leképezés *rendezéstartó*.

(3e) *tétel.*  $R_+$  folytonos halmaz, amelyben  $Q_+$  sűrű.

(3f) *kiegészítés.* Az  $R_+$ -ban minden  $a \trianglelefteq s_n/s'_n$  tizedestört az  $(s_n)$  és  $(s'_n)$  sorozatból ill. közelítő törteiből képezett szeletpárnak egyértelműen meghatározott szeleteleme:  $a \trianglelefteq (s_n/s'_n)$ .

A (3c)–(3f) állítások bizonyítása közvetlenül adódik (3a)-ból anélkül, hogy az aritmetikán kívüli  $(S, <)$  tartomány megfelelő tulajdonságait átvisszük  $(R_+, <)$ -ra. Ezeket az állításokat — aritmetikán kívüli eszközöktől függetlenül — szeretnénk aritmetikán belüli felépítés céljából megkapni, ami némi fáradsággal (különösen (3c)-re tekintettel) lehetséges is. Ez a megállapítás azért különösen jelentős, mert ezáltal  $R_+$  előállításánál során tisztán halmazelméletileg egy folytonos halmazt konstruálunk, míg  $S$ -nek a folytonossága egy geometriai axióma.

Teljesség kedvéért  $(R_+, <)$ -nak mint a  $(Q_+, <)$ -t tartalmazó folytonos halmaznak algebrai jellemzéséhez egy megjegyzést kívánunk fűzni.

(3g) *tétel.* A  $Q_+$ -t tartalmazó folytonos  $A$  halmazra a következő állítások ekvivalensek:

1.  $(A, <)$  izomorf  $(R_+, <)$ -val.
2.  $A$  az  $R_+$ -t tartalmazó minimális folytonos halmaz.
3.  $A$ -nak nincs maximuma, és  $Q_+$  sűrű  $A$ -ban.
4. Mindegyik  $a (\in A)$  elem egy  $Q_+$ -beli  $(X/X') \in D$ -szeletnek szeleteleme, és mindegyik  $Q_+$ -beli  $D$ -szeletnek pontosan egy szeleteleme van  $A$ -ban.
5. Mindegyik  $a (\in A)$  elem  $Q_+$  nemüres részhalmazainak szupremuma és infimuma.

### 4. Összeadás és szorzás $R_+$ -ban

Célunk olyan összeadás és szorzás bevezetése  $R_+$ -ban, amelyik V6-ot és V7-et kielégíti. E célból először az  $a\alpha + b\alpha$  és  $a(b\alpha)$  kifejezéseket írjuk le:

(4a) *tétel.* Legyen  $a \trianglelefteq (s_n/s'_n)$  és  $b \trianglelefteq (t_n/t'_n)$ . Érvényesek a következők:

- (ii)  $a\alpha + b\alpha = c\alpha \Rightarrow c = (s_n + t_n/s'_n + t'_n),$   
 (iii)  $a(b\alpha) = d \Rightarrow d = (s_n \cdot t_n/s'_n \cdot t'_n).$

Ennek a tételnek a bizonyításánál és a későbbiekben is a nehézségek abban mutatkoznak meg, hogy bár az

$$(s_n + t_n)\alpha \leq c\alpha \leq (s'_n + t'_n)\alpha, \quad (s_n t_n)\alpha \leq d\alpha \leq (s'_n t'_n)\alpha$$

állításokat rögtön megkapjuk, azonban  $s_n + t_n$  és  $s'_n + t'_n$ , ill.  $s_n t_n$  és  $s'_n t'_n$  nem szükségképpen egy tizedestörtnek közelítő törtje, amiért  $c$  ill.  $d$  egyértelműségét (2b)-től függetlenül kell igazolni. Hasznos segédeszközként vezessük be ehhez az általánosított szelet fogalmát:

(4b) *definíció.* Egy  $(X/X')$  szeletpárt általánosított szeletnek ( $V$ -szeletnek) nevezünk  $Q_+$ -ban, ha mindegyik  $t (\in Q_n^*)$ -hez léteznek olyan  $x \in X$  és  $x' \in X'$  elemek, amelyekre  $0 \leq x' - x < t$  teljesül.

(4c) *következmény.*

1.  $(s_n/s'_n)$  egy  $V$ -szelet  $Q_+$ -ban,
2. Mindegyik  $Q_+$ -beli  $V$ -szeletnek van pontosan egy szeleteleme  $R_+$ -ban.
3. Ha  $(X/X')$  és  $(Y/Y')$   $Q_+$ -beli  $V$ -szelet, akkor  $(X + X'/Y + Y')$  és  $(XY/X'Y')$  is az.

Ezek az állítások nagyobb nehézségek nélkül következnek, és adják (4a) bizonyítását, ugyanakkor az  $R_+$ -beli összeadás és szorzás aritmetikán kívüli motivációját szolgáltatják:

(4d) *definíció*

$$(ij) \quad a + b \triangleq (s_n + t_n/s'_n + t'_n),$$

$$(iii) \quad a \cdot b \triangleq (s_n t_n/s'_n t'_n).$$

(4e) *tétel.* A (j)–(jjj) *definíciók alapján kapjuk a  $Q_+$ -nak egy természetesen rendezett folytonos  $R_+ = (R_+, <, +, \cdot)$  féltestbővítését.*

A (4e) bizonyítása azt az előzetes megfontolást igényli, hogy (jj) és (jjj) független attól, hogy az  $a, b$  szeletelemet mely  $V$ -szeletből választjuk. A bizonyítás azonban nagyon aprólékos és természetesen tisztán aritmetikai. Egyébként az iskolai helyzetre való tekintettel itt előforduló aritmetikán kívüli motivációt a megszokott módon tisztán aritmetikaivá alakíthatjuk, miközben a következő struktúrátételt mondjuk ki.

(4g) *tétel.* Legyen  $A$  egy természetesen rendezett folytonos féltest, amely tartalmazza  $Q_+$ -t. Ekkor

$$\varphi: R_+ \rightarrow A \quad (a \triangleq (s_n/s'_n) \mapsto a \triangleq (s_n/s'_n))$$

*bijektív leképezés, amely  $Q_+$ -t azonosan képezi le, és érvényes:*

$$(i) \quad a^* < b^* \Leftrightarrow \exists n (a_0 = b_0, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}, a_n < b_n),$$

$$(ii) \quad a^* + b^* \triangleq (s_n + t_n/s'_n + t'_n),$$

$$(iii) \quad a^* \cdot b^* \triangleq (s_n \cdot t_n/s'_n \cdot t'_n).$$

A bizonyítás hasonlóan végezhető el, mint a (3a), (4a) tételnél, ha  $\alpha \in S$  helyett az  $1 \in A$  elemet tekintjük.

Végül az  $R_+$ -nak algebrai jellemzését adjuk:

(4h) *tétel.* Az  $A = (A, <, +, \cdot)$  struktúrára az alábbiak ekvivalensek:

1.  $A$  izomorf  $R_+$ -szal;
2.  $A$  a  $Q_+$ -t tartalmazó minimális folytonos féltest;
3.  $A$  a  $Q_+$ -t tartalmazó rendezett féltest, amelyre  $(A, <)$  a  $(Q_+, <)$ -t tartalmazó minimális folytonos halmaz;

4. *A természetesen rendezett folytonos féltest, amely tartalmazza  $Q_+$ -t;*
5. *A minimális folytonos féltest;*
6. *A természetesen rendezett, folytonos féltest.*

## IRODALOM

- [1] LUGOWSKI, H.: Strukturdenken in der Schulmathematik, Math. i.d. Schule 9 (1971) Heft 11, S. 663—672.
- [2] LUGOWSKI, H.: Zur Motivierung von Zahlenbereichserweiterungen, Greifswalder Kolloquium 29. 2, 1980, S. 13—25.
- [3] LUGOWSKI, H.: Zur Einführung der rationalen Zahlen, Berliner Kolloquium 22. 1. 1981, S. 29—40.
- [4] LUGOWSKI, H.: Zur Einführung der reellen Zahlen als Dezimalbrüche, Leipziger Kolloquium 1. 4. 1982, S. 33—39.
- [5] LUGOWSKI, H.: A Számbővítés motivációjáról, Acta Acad. Paed., Szeged 1982. Vol. II. S. 141—152.

## ZUR EINFÜHRUNG DER REELLEN ZAHLEN ALS DEZIMALBRÜCHE

H. LUGOWSKI

Im dem vorhergehenden Artikel [5] erfolgte eine strukturelle Beschreibung der außerarithmetischen Argumentation im Schulunterricht und des innerarithmetischen Vorgehens bei der Einführung des Halbkörpers  $Q_+$  der nichtnegativen rationalen (gebrochenen) Zahlen. Wir zeigen, wie sich die Erweiterung von  $Q_+$  zum Halbkörper  $R_+$  der nichtnegativen reellen Zahlen unter völlig analogen Gesichtspunkten vollziehen läßt.

## ВВЕДЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ К КАЧЕСТВУ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

ГЕРБЕРТ ЛУГОВСКИ

В работе под (5) при введении полутела  $Q_+$  не-негативных рациональных чисел мы рассматриваем такое структурное описание, которое в одинаковой мере содержит как аргументацию за пределами арифметики, так и метод, вытекающий из внутренних свойств арифметики, использующийся в процессе преподавания математики. В данной работе мы показываем, что совершенно аналогичным образом возможно расширение  $Q_+$  в полутело не-негативных действительных чисел.



## A HIPERBOLIKUS PARABOLOID EGY SZÁRMAZTATÁSI LEHETŐSÉGERŐL

MISKOLCZI JÓZSEF

Ismert a hiperbolikus paraboloid (nyeregfelület) alábbi előállítási módja:

1. Válasszunk két merőleges síkú és ellentétes tengelyirányú parabolát, és ennek egyikét rögzítsük, s a másikat úgy mozgassuk, hogy síkjának állása és tengelyének iránya változatlan maradjon, csúcspontja pedig a másik parabolát írja le. A mozgó parabola által generált felületet hiperbolikus paraboloidnak nevezzük. Ugyanazon nyeregfelülethez jutunk, ha a két parabola szerepét felcseréljük.

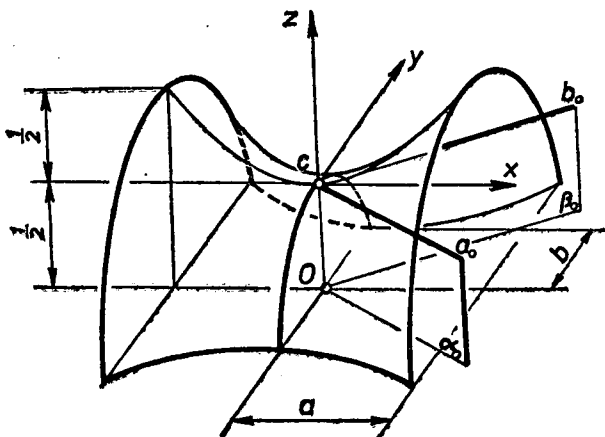
Ha megfelelő koordináta-rendszert választunk, akkor minden hiperbolikus paraboloid egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

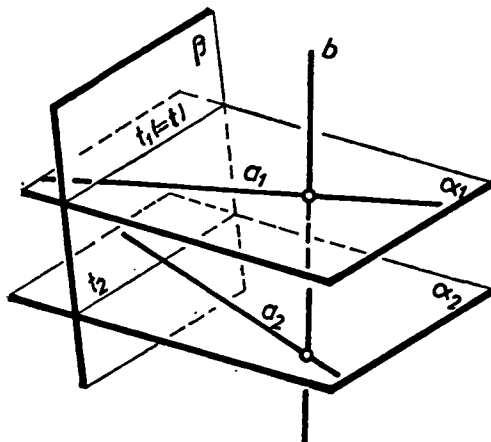
alakú. A rögzített és a mozgattott parabola paramétere  $a^2(=p)$  és  $b^2(=p')$ .

2. Ha adva van az  $a_1, a_2$  kitérő egyenespár és egy ezeket metsző  $\beta$  sík, akkor az  $a_1, a_2$  kitérő egyenesek  $\beta$  síkkal egyező állású tranzverzális egyenesei hiperbolikus paraboloidot alkotnak.

Bevezetjük a következő jelöléseket:  $a_1 \lambda a_2 := a_1$  és  $a_2$  kitérő egyenespár;  $b \parallel \beta := b$  egyenes egyező állású a  $\beta$  síkkal.



1. ábra



2. ábra

Legyen  $\Phi$  az  $a_1\lambda a_2$  kitérő egyenespárral a fenti módon generált nyeregfelület. Ugyanezen  $\Phi$  felülethez jutunk el abban az esetben is, ha a  $b$  típusú egyenessereg bármely  $b_1\lambda b_2$  párjának az  $\alpha$  ( $=\alpha_1$  vagy  $\parallel\alpha_1$ ) síkkal egyező állású tranzverzális egyenesseregét tekintjük. (Az  $a_1$  és  $a_2$  is ezen seregre tartozik.) Az „ $a$ ” és „ $b$ ” típusú egyenesek alkotják a hiperbolikus paraboloid jól ismert két alkotóseregét, amelyekhez az 1. generálási mód során is eljuthatunk.

Célszerű a későbbiek miatt az alábbi definíciókat megadni: Az  $\alpha$  és  $\beta$  síkkal egyező állású síkokat iránysíkoknak nevezzük. Az  $a_0, b_0$  egyenesek a  $\Phi$  nyeregfelület csúcsalkotói:  $a_0 \mid (a_0 \perp t) \wedge (a_0 \parallel \alpha)$ ;  $b_0 \mid (b_0 \perp t) \wedge (b_0 \parallel \beta)$ , ahol  $t = \alpha \cap \beta$ , és  $a_0$  az „ $a$ ” seregbeli,  $b_0$  a „ $b$ ” seregbeli elem. A nyeregfelület csúcsa:  $C = a_0 \cap b_0$ . A nyeregfelület  $t_0$  tengelye:  $t_0 \mid (t_0 \parallel t) \wedge (C \in t_0)$ . Az  $\alpha_0, \beta_0$  érintő síkok:  $\alpha_0 = (a_0 \times t_0)$ ;  $\beta_0 = (b_0 \times t_0)$ . Az utolsó definíció szerint tehát a végérintő síkok speciális helyzetű iránysíkok.

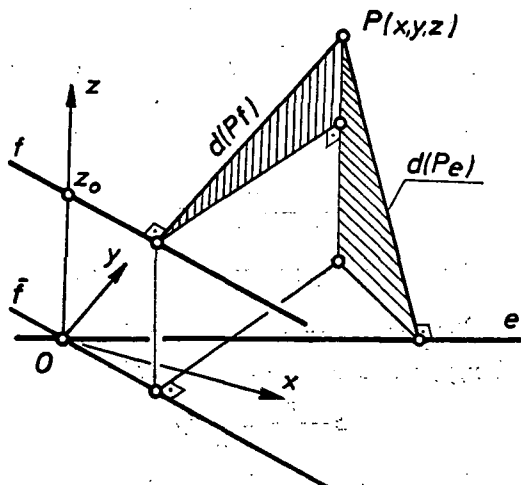
3. Szokás a hiperbolikus paraboloidot páronkénti kitérő három, egy ugyanazon síkkal párhuzamos egyenesek segítségével is származtatni. A nyeregfelületet az említett egyenesek tranzverzális egyenesei generálják. Ez a származtatási mód lényegében nem különbözik a 2. generálási módtól. Ezt akkor használjuk, ha a nyeregfelülethez az egyköpenyű hiperboloid származtatási módjának speciális eseteként akarunk eljutni. Uí. ha páronként kitérő három egyenes nem párhuzamos egy és ugyanazon síkkal, akkor a három egyenes tranzverzális egyenesei egyköpenyű hiperboloidot alkotnak.

A következőkben a hiperbolikus paraboloid egy újabb generálási lehetőségét mutatjuk be. Ez a származtatás analóg azzal, ahogyan ellipszoidot a gömbfelület felhasználásával előállítjuk, vagy ahogy minden el nem fajuló másodrendű felületet — a nyeregfelület kivételével — a megfelelő forgásfelület segítségével generálunk. A generálás ismertetése előtt két tételt bizonyítunk, majd minden hiperbolikus paraboloidhoz hozzárendelünk egy-egy tetraédert.

1. Tétel. Két kitérő egyenestől egyenlő távolságra levő pontok halmaza olyan hiperbolikus paraboloid, amelynek végérintő síkjai merőlegesek egymásra.

Nevezzük ezt a felületet a két kitérő egyeneshez tartozó hiperbolikus paraboloidnak.

**Bizonyítás.** Legyen a két kitérő egyenes  $e$  és  $f$ . Jelölje  $d(ef)$  a két kitérő egyenes távolságát. Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy a  $z$  tengely illeszkedjen  $e, f$  egyenesek normáltranzverzálisára, a koordináta-rendszer 0 kezdőpontja az  $e$  egyenesre, az  $x$  tengely pedig az  $e, f$  egyenesek egyik szögfelező síkjára. (3. ábra)



3. ábra

Az ábrán az  $f$  egyenesnek az  $xy$  síkra vetett merőleges vetületét  $\bar{f}$ , a  $z$  tengellyel való metszéspontját  $z_0$  jelöli. Az  $xy$  síkban az  $m$  meredekségű  $e$  egyenes egyenlete:

$$\frac{y}{\sqrt{m^2+1}} - \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} x = 0,$$

az  $\bar{f}$  egyenlete:

$$\frac{y}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} x = 0$$

alakban írható.

a) Ha egy tetszőleges  $P(x, y, z)$  pontra teljesül, hogy  $d(Pe) = d(Pf)$ , akkor

$$\left( \frac{y}{\sqrt{m^2+1}} - \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} x \right)^2 + z^2 = \left( \frac{y}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} x \right)^2 + (z - z_0)^2 \quad (1)$$

$$2zz_0 - z_0^2 = \frac{4m}{m^2+1} xy$$

mivel  $d(ef) > 0$ , ezért

$$z - \frac{z_0}{2} = \frac{2m}{z_0(m^2+1)} xy. \quad (2)$$

Így azt kaptuk, hogy a tétel feltételeinek eleget tevő pontok olyan  $\Phi$ , nyeregfelületekre illeszkednek, amelyeknek csúcspontja  $\vec{C}(0, 0, \frac{z_0}{2})$ , végérintő síkjai:  $xz$  és  $yz$ , s ezek merőlegesek egymásra.

b) Látható, hogy a (2) egyenletet kielégítő  $(x, y, z)$  pontok kielégítik az (1)-et is, azaz egyenlő távolságra vannak az  $e, f$  egyenesektől.

2. Tétel. Minden olyan  $\Phi$ , nyeregfelülethez, amelynek a végérintő síkjai merőlegesek egymásra, található legalább egy olyan kitérő egyenespár, amelyhez tartozó hiperbolikus paraboloid a  $\Phi$ .

Bizonyítás. Minden olyan hiperbolikus paraboloid, amelynek végérintő síkjai merőlegesek egymásra

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 2z \quad (3)$$

alakú. Forgassuk el a (3) alatti nyeregfelületet a  $z$  tengely körül pozitív irányban  $45^\circ$ -kal, majd alkalmazzunk  $\frac{1}{2} \vec{Oz_0}$  vektorú eltolást. A transzformált nyeregfelület egyenlete (az eredeti  $x, y, z$  koordináta-rendszerben)

$$z - \frac{z_0}{2} = \frac{1}{2} xy \quad (4)$$

alakú lesz. A (4)-et (2)-vel összevetve adódik, hogy

$$\frac{1}{a^2} = \frac{2m}{z_0(m^2 + 1)} \quad (5)$$

Ezt az eredményt és a 2. tétel bizonyítása során alkalmazott gondolatmenetet figyelembe véve azt kaptuk, hogy minden (3) alatti nyeregfelülethez végtelen sok olyan  $e, f$  pár található, amely mindegyike hozzátartozik a  $\Phi$ , hiperbolikus paraboloidhoz, azaz a kapott kitérő egyenespárok bármelyike generálja  $\Phi$ -t.

Tekintsük az 1. pont alatt megadott generáló parabolákat az 1. ábrán látható helyzetben. Mindkét parabola síkjában a fókuszokon keresztül állítsunk merőleges egyenest a tengelyre. Jelöljük az egyeneseknek a parabolával való metszéspontjait az  $xz$  síkban  $A$  és  $B$ -vel, az  $yz$  síkban  $C$  és  $D$ -vel. Az  $ABCD$  pontnégyes egy tetraédert határoz meg, amelyet nevezzük a  $\Phi$  nyeregfelülethez tartozó tetraédernek.

Legyen  $A_1 B_1 C_1 D_1$  a  $\Phi_1$ , az  $A_2 B_2 C_2 D_2$  tetraéder pedig a  $\Phi_2$  nyeregfelülethez tartozó tetraéder. Az  $A_1 \rightarrow A_2$ ,  $B_1 \rightarrow B_2$ ,  $C_1 \rightarrow C_2$ ,  $D_1 \rightarrow D_2$  kikötésekkel megadott  $\psi$  affinitás a  $\Phi_1$  felületet leképezi a  $\Phi_2$  felületre.

Az eddigiek alapján most már látható, hogy bármely

$$\Phi: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

hiperbolikus paraboloidhoz eljuthatunk úgy is, hogy előbb egy  $e, f$  kitérő egyenespárhoz generálunk egy  $\Phi$ , típusú felületet, majd ezt a felületet a  $\Phi$ , és  $\Phi$ -hez tartozó tetraéderek által meghatározott affintranzformációval átvisszük  $\Phi$ -be.

Befejezésül megemlítjük azt a nyilvánvaló tényt, hogy minden  $\Phi$ , hasonló egymáshoz. Ebből viszont az következik, hogy minden  $\Phi$ , -hez tartozik olyan generáló  $e, f$ -pár, amelyekben szereplő egyenesek merőlegesek egymásra, s az egyik egyenes az 1. alatt megadott generáló parabolák egyikének a fókuszára, a másik egyenes a másik parabola fókuszára illeszkedik.

- [1] KLUG L.: Projektiv geometria, 1904.
- [2] HAJÓS Gy.: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, 1960.
- [3] STROMMER Gy.: Ábrázoló geometria, Tankönyvkiadó, 1971.

## **ÜBER EINE ERZEUGUNG DES HYPERBOLISCHEN PARABOLOIDS**

J. MISKOLCZI

Der Verfasser stellt eine ähnliche Erzeugungsmöglichkeit des hyperbolischen Paraboloids dar, wie das Ellipsoid mit Hilfe der Kugelfläche erzeugt wird, oder wie alle nichtausgearteten Flächen zweiter Ordnung — mit Ausnahme der Sattelfläche — mit Hilfe einer entsprechenden Drehungsfläche erzeugt werden.

## **ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ПРОИСХОЖДЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА**

ЙОЖЕФ МИШКОЛЬЦИ

Автор в своей работе указывает на такую генеральную возможность гиперболического параболоида, являющейся аналогичной той, с помощью которой выводится эллипсоид с использованием вращения поверхности шара или же-как и любую вырожденную поверхность второй степени — за исключением седловой поверхности — мы генерализуем с помощью соответствующей поверхности вращения.



## A $q$ -MINTAFÜGGVÉNYEK FUNKCIONÁLIS TELJESSÉGE, HA $q$ RENDEZÉS

VÁRMONOSTORY ENDRE

1. Ebben a dolgozatban az alaphalmaz mindig egy véges, részben rendezett halmaz, amelynek van legnagyobb és legkisebb eleme. Azt vizsgáljuk, hogy az alaphalmazon értelmezett összes függvény előállítható-e bizonyos függvényekből, az identikus és konstans függvényekből.

Az előző két dolgozat is hasonló problémákkal foglalkozik. Most a lineáris rendezésre vonatkozó eredmények egy részét általánosítom rendezésre.

Az alaphalmaz legyen:  $H = \{0, e_1, \dots, n-1\}$ , ahol  $n > 2$ .

Egy  $k$  változós  $f$  függvényt  $q$ -mintafüggvénynek nevezünk, ha:

- a) bármely  $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$  esetén  $f(x_1, \dots, x_k) = x_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ),
- b) valahányszor  $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$  és  $\langle y_1, \dots, y_k \rangle$  azonos mintájúak  $q$ -ra nézve, (azaz minden  $(i, j)$  párra  $x_i q x_j \Leftrightarrow y_i q y_j$ ) mindannyiszor  $f(y_1, \dots, y_k) = y_i$ .

A  $H$  halmazon értelmezett  $f$  függvényt *funkcionálisan teljesnek* nevezük, ha belőle, a projekciókból és az egyváltozós konstans függvényekből összetett függvényként a  $H$ -n értelmezett összes függvény előállítható.

Fried és Pixley [1]-ben bizonyította, hogy a  $H$ -n értelmezett

$$d(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{ha } x = y, \\ z, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$$

függvény függvényteljes. Ezt a függvényt nevezzük *duális diszkriminátornak*.

Hasonlóan a Pixley-féle ún. *diszkriminátor* is függvényteljes a  $H$  halmazon:

$$t(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{ha } x = y, \\ x, & \text{ha } x \neq y. \end{cases}$$

Az előbbi két függvény  $q$ -mintafüggvény, ahol a  $q$  egyenlőségreláció.

Szükségünk lesz az alábbi ún. kifejtési tételre: (Wille [4], Werner [5]).

Ha  $\wedge$  és  $\vee$  olyan kétváltozós műveletek  $H$ -n, hogy minden  $a \in H$ -ra teljesül  $a \wedge 1 = a$ ,  $a \wedge 0 = 0$ ,  $a \vee 0 = a = 0 \vee a$ , akkor a

$$\{\wedge, \vee, \chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{n-1}, c_0, c_1, \dots, c_{n-1}\}$$

halmaz teljes, ahol

$$\chi_i(a) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a = i, \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (0 \leq i \leq n-1).$$

Most vizsgáljuk meg a duális diszkriminátor megfelelőjét, ha az egyenlőség reláció helyett rendezési relációt írunk.

1. Tétel. Ha adott egy  $\cong$  rendezési reláció a  $H$  halmazon, akkor az

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \cong y, \\ z & \text{különben} \end{cases}$$

függvényteljes.

Bizonyítás. Legyen  $x \wedge y = f(0, y, x)$ . Ekkor teljesül a következő:  $a \wedge 0 = 0$ .  $a \wedge e_1 = a$  minden  $a (\in H)$ -ra.

Ha  $x \vee y = f(x, y, y)$  akkor  $0 \vee a = a = a \vee 0$  minden  $a (\in H)$ -ra. Az  $a = 0$ -ra definiáljuk a  $\chi_a(x)$  karakterisztikus függvényt következőképpen:

$$\chi_0(x) = f(e_1, f(0, f(0, x, e_1), n-1), 0).$$

Ha  $0 < a < n-1$  akkor a  $\chi_a(x)$  karakterisztikus függvény a következő lesz:

$$\chi_a(x) = f(0, f(f(a, x, 0), f(f(x, a, n-1), a, n-1), 0), e_1).$$

Az  $a = n-1$  esetén a  $\chi_a(x)$  karakterisztikus függvény definíciója:

$$\chi_{n-1}(x) = f(0, f(f(f(x, n-1, e_1), e_1, 0), n-1, 0), e_1).$$

2. Tétel. Legyen adott a  $H$  halmazon a  $\cong$  rendezési reláció, akkor az

$$f(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{ha } x \cong y, \\ y & \text{különben} \end{cases}$$

függvény függvényteljes a  $H$  halmazon.

Bizonyítás. Ha  $x \vee y = f(x, y, x)$ , akkor  $a \vee 0 = a = 0 \vee a$  minden  $a (\in H)$ -ra.

Legyen

$$x \wedge y = \begin{cases} f(y, f(x, 0, y), 0), & \text{ha } x = 0 \text{ és } y \text{ tetszőleges,} \\ f(x, e_1, y), & \text{ha } x = e_1 \text{ és } y \text{ tetszőleges,} \\ f(e_1, f(y, e_1, x), 0), & \text{ha } x \neq 0, x \neq e_1 \text{ és } y \text{ tetszőleges.} \end{cases}$$

Ekkor teljesül  $a \wedge 0 = 0$ ,  $a \wedge e_1 = a$  minden  $a (\in H)$ -ra.

A  $\chi_a(x)$  karakterisztikus függvény definíciója:

Ha  $a = 0$ , akkor

$$\chi_0(x) = f(f(e_1, x, 0), f(x, f(x, f(0, f(e_1, x, 0), e_1), 0), 0), 0).$$

Ha  $a = e_1$ , akkor:

$$\chi_{e_1}(x) = f(f(e_1, x, 0), x, 0).$$

Ha  $n-1 > a > 0$  és  $a \neq e_1$ , akkor:

$$\chi_a(x) = f(f(a, f(e_1, \dots, f(a-1, f(f(a, x, 0), x, n-1), n-1), \dots, n-1), 0), e_1, 0).$$

Ha  $a = n-1$ , akkor:

$$\chi_{n-1}(x) = f(f(e_1, f(x, n-1, e_1), 0), e_1, 0).$$



### Megjegyzés.

A  $H$  halmazon értelmezett  $q$ -mintafüggvények között van olyan függvény, amely nem függvényteljes, ha  $q$  rendezési reláció. Tekintsük például az

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \cong y, \\ y & \text{különben} \end{cases}$$

függvényt. Ez nem függvényteljes, ugyanis nem állítható elő belőle a projekciókból és a konstansokból olyan egyváltozós  $g(x)$  függvény, amelyre  $g(n-1)=0$ .

### IRODALOM

- [1] E. FRIED, A. F. PIXLEY: The dual discriminator function in universal algebra, Acta Sci. Math. 41/1979, 83—100.
- [2] VÁRMONOSTORY ENDRE: A  $q$ -mintafüggvények funkcionális teljessége, a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei, 1980., 171—175.
- [3] E. VÁRMONOSTORY: Relational pattern functions "Finite Algebra and Many-Valued Logic" Coll. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 28., 1981.
- [4] H. WERNER: Diskriminator-Algebras, Akademie-Verlag, Berlin, 1978.
- [5] R. WILLE: Allgemeine Algebra — zwischen Grundlagenforschung and Anwendbarkeit (preprint).

## DIE FUNKTIONELLE VOLLSTÄNDIGKEIT VON $q$ -MUSTERFUNKTIONEN, WENN $q$ EINE ORDNUNG IST

ENDRE VÁRMONOSTORY

Eine  $f$ -Funktion mit  $k$ -Veränderlicher nenne wir eine  $q$ -Musterfunktion, wenn

- a) für jedes  $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$  gilt  $f(x_1, \dots, x_k) = x_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) und
- b) sind  $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$  und  $\langle y_1, \dots, y_k \rangle$  gleichmüstrig in Bezug auf  $q$  (d.h. für jedes Paar  $(i, j) : x_i q x_j, \langle \equiv \rangle y_i q y_j$ ), so gilt  $f(y_1, \dots, y_k) = y_i$ .

Es wird bewiesen, dass gewisse in der Arbeit definierte Funktionen in jeder endlichen teilweise geordneten Menge, die eine kleinste und eine grösste Element hat, funktionell vollständig sind.

## ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПОЛНОТА $q$ ТРАФАРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ ЕСЛИ $q$ ПОРЯДОК

Функцию  $f$  от  $k$  переменных мы называем  $q$ -трафаретной функцией если:

- а) три любых  $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$  имеет место  $f(x_1, \dots, x_k) = x_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ),

и

- б) зависит от  $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$  таким образом что  $f(y_1, \dots, y_k) = y_i$  тем же  $i$  каждый раз когда  $\langle x_1, \dots, x_k \rangle, \langle y_1, \dots, y_k \rangle$  одинакового типа относительно отношения  $q$  (т.е. для каждой пары  $x_i q x_j (=) y_i y_j$ ). Автор в работе показывает, что на каждом конечном, частичном упорядоченном множестве некоторые определенные  $q$ -трафаретные функции являются функциональными плынями.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800	801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000	1001	1002	1003	1004	1005	1006	1007	1008	1009	1010	1011	1012	1013	1014	1015	1016	1017	1018	1019	1020	1021	1022	1023	1024	1025	1026	1027	1028	1029	1030	1031	1032	1033	1034	1035	1036	1037	1038	1039	1040	1041	1042	1043	1044	1045	1046	1047	1048	1049	1050	1051	1052	1053	1054	1055	1056	1057	1058	1059	1060	1061	1062	1063	1064	1065	1066	1067	1068	1069	1070	1071	1072	1073	1074	1075	1076	1077	1078	1079	1080	1081	1082	1083	1084	1085	1086	1087	1088	1089	1090	1091	1092	1093	1094	1095	1096	1097	1098	1099	1100	1101	1102	1103	1104	1105	1106	1107	1108	1109	1110	1111	1112	1113	1114	1115	1116	1117	1118	1119	1120	1121	1122	1123	1124	1125	1126	1127	1128	1129	1130	1131	1132	1133	1134	1135	1136	1137	1138	1139	1140	1141	1142	1143	1144	1145	1146	1147	1148	1149	1150	1151	1152	1153	1154	1155	1156	1157	1158	1159	1160	1161	1162	1163	1164	1165	1166	1167	1168	1169	1170	1171	1172	1173	1174	1175	1176	1177	1178	1179	1180	1181	1182	1183	1184	1185	1186	1187	1188	1189	1190	1191	1192	1193	1194	1195	1196	1197	1198	1199	1200	1201	1202	1203	1204	1205	1206	1207	1208	1209	1210	1211	1212	1213	1214	1215	1216	1217	1218	1219	1220	1221	1222	1223	1224	1225	1226	1227	1228	1229	1230	1231	1232	1233	1234	1235	1236	1237	1238	1239	1240	1241	1242	1243	1244	1245	1246	1247	1248	1249	1250	1251	1252	1253	1254	1255	1256	1257	1258	1259	1260	1261	1262	1263	1264	1265	1266	1267	1268	1269	1270	1271	1272	1273	1274	1275	1276	1277	1278	1279	1280	1281	1282	1283	1284	1285	1286	1287	1288	1289	1290	1291	1292	1293	1294	1295	1296	1297	1298	1299	1300	1301	1302	1303	1304	1305	1306	1307	1308	1309	1310	1311	1312	1313	1314	1315	1316	1317	1318	1319	1320	1321	1322	1323	1324	1325	1326	1327	1328	1329	1330	1331	1332	1333	1334	1335	1336	1337	1338	1339	1340	1341	1342	1343	1344	1345	1346	1347	1348	1349	1350	1351	1352	1353	1354	1355	1356	1357	1358	1359	1360	1361	1362	1363	1364	1365	1366	1367	1368	1369	1370	1371	1372	1373	1374	1375	1376	1377	1378	1379	1380	1381	1382	1383	1384	1385	1386	1387	1388	1389	1390	1391	1392	1393	1394	1395	1396	1397	1398	1399	1400	1401	1402	1403	1404	1405	1406	1407	1408	1409	1410	1411	1412	1413	1414	1415	1416	1417	1418	1419	1420	1421	1422	1423	1424	1425	1426	1427	1428	1429	1430	1431	1432	1433	1434	1435	1436	1437	1438	1439	1440	1441	1442	1443	1444	1445	1446	1447	1448	1449	1450	1451	1452	1453	1454	1455	1456	1457	1458	1459	1460	1461	1462	1463	1464	1465	1466	1467	1468	1469	1470	1471	1472	1473	1474	1475	1476	1477	1478	1479	1480	1481	1482	1483	1484	1485	1486	1487	1488	1489	1490	1491	1492	1493	1494	1495	14
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	----

## TARTALOM

<i>Pintér Ferenc—Seres Ferenc—Vize László—Gáti József</i> : Adalékok a többkomponensű rendszerek kényszerített Raman-szórásának elméletéhez .....	3
<i>Nagy Pál—Herzfeld Rozália</i> : Oldószerhatás vizsgálata a Schiff-bázisok amincseréjénél, IV. N-(2-hidroxi-1-naftiliden)-anilin és n-butyl-amin reakciójának aktiválási paraméterei etanol-benzol oldószerkeletben .....	15
<i>Herbert Lugowski</i> : A valós számok tizedestörtként való bevezetése .....	25
<i>Miskolczi József</i> : A hiperbolikus paraboloid egy származtatási lehetőségéről .....	31
<i>Vármonostory Endre</i> : A $q$ -mintafüggvények funkcionális teljessége, ha $q$ -rendezés .....	37

## INHALT

<i>Pintér, Ferenc—Seres, Ferenc—Vize, László—Gáti, László</i> : Daten zur Theorie der erzwungenen Raman-Streuung zusammengesetzter Systeme .....	3
<i>Nagy, Pál—Herzfeld, Rozália</i> : Untersuchung der Lösungsmittelwirkung beim Aminaustausch der Schiff-Basen, IV. Die Aktivierungsparameter der Reaktion von N-(2-Hydroxy-1-naphthyliden) anilin und n-Butyl-amin in Aethanol-Benzol-Lösungsmittelgemischen ...	15
<i>Lugowski, H.</i> : Zur Einführung der reellen Zahlen als Dezimalbrüche .....	25
<i>Miskolczi, József</i> : Über eine Erzeugung des hyperbolischen Paraboloids .....	31
<i>Vármonostory, Endre</i> : Die funktionelle Vollständigkeit von $q$ -Musterfunktionen, wenn $q$ eine Ordnung ist .....	37

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Пинтер; Ференц; Шереш, Ференц; Визе, Ласло; Гати, Ласло: К теории вынужденного рассеяния-Raman многокомпонентных систем</i> .....	3
<i>Надь, Пал; Херцфельд, Розалия: Исследование влияния растворителя на аминоксмен. IV. Параметры активации реакции N (2-гидроокись-1-нафтилиден) анилин и п-бутиламина в смеси растворителя этанол-бензола</i> .....	15
<i>Луговски, Герберт: Введение действительных чисел к качестве десятигных дробей</i> .....	25
<i>Мишкольци, Йомсеф: Об одной возможности происхождения гиперболического параболоида</i> .....	31
<i>Вармоноштори, Э.: Функциональная полнота <math>q</math> трафаретных функций если <math>q</math> порядок</i> ....	37

**Felelős kiadó a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola főigazgatója**  
**86-2963 — Szegedi Nyomda — Felelős vezető: Surányi Tibor igazgató**  
**Készült monószedéssel, íves magasnyomással, 3,8 A5 ív terjedelemben,**  
**az MSZ 5601—59 és 5602—55 szabvány szerint**